МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА

Механико-математический факультет

ПРИНЦИП МАКСИМУМА В ОПТИМАЛЬНОМ УПРАВЛЕНИИ

А.А. Милютин, А.В. Дмитрук, Н.П. Осмоловский

Москва 2004

А.А. Милютин, А.В. Дмитрук, Н.П. Осмоловский

Принцип максимума в оптимальном управлении

Книга посвящена доказательству принципа максимума в классической понтрягинской задаче оптимального управления и в общей задаче с фазовыми и регулярными смешанными ограничениями, наложенными на фазовые и управляющие переменные. Регулярность означает линейно-позитивную независимость градиентов по управлению от смешанных ограничений равенства и неравенства. Доказательство в первом случае сравнительно простое, оно основано на приеме замены времени и использует правило множителей Лагранжа для конечномерных гладких задач. Во втором случае доказательство проводится по схеме Дубовицкого–Милютина. В книге дается изложение этой схемы для абстрактных задач на экстремум в банаховых пространствах, а также всех необходимых сведений из функционального, выпуклого и нелинейного анализа. Как этап реализации схемы в общей задаче оптимального управления выводится уравнение Эйлера–Лагранжа — необходимое условие слабого минимума, а затем с помощью т.н. вариаций скольжения устанавливается принцип максимума.

Книга написана на основе лекций, которые авторы читали на механико-математическом факультете МГУ.

Для студентов, аспирантов и научных работников, интересующихся вопросами функционального анализа, вариационного исчисления и оптимального управления.

Библ. 24 назв.

Рецензенты:

профессор *М.С. Никольский, МИРАН*

профессор *В.М. Тихомиров, мехмат МГУ*

Замечания и предложения по содержанию книги, а также указания на возможные неточности и опечатки просим направлять по адресам

vraimax@mail.ru, dmitruk@member.ams.org, nikolai@osmolovskii.msk.ru.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение

Книга посвящена основному результату теории оптимального управления — принципу максимума (ПМ). Принцип максимума был получен более полувека лет назад Л.С.Понтрягиным и его сотрудниками и послужил основой для создания новой математической дисциплины – теории оптимального управления. Появление книги [1] стало мощным толчком к пересмотру базовых понятий теории экстремума, к ее развитию, и вызвало громадное количество исследований и публикаций. Наибольший вклад в развитие теории принципа максимума был сделан А.Я.Дубовицким и А.А.Милютиным. Анализируя доказательство ПМ, изложенное в книге [1], и осмысливая связь ПМ с классическим вариационным исчислением, они предложили новый метод получения необходимых условий в задачах на экстремум с ограничениями — так называемую схему Дубовицкого–Милютина, которая сразу завоевала широкое признание своей неожиданной ясностью, универсальностью и эффективностью. Она позволила установить идейную связь оптимального управления с классическим вариационным исчислением и распространить ПМ на более общие классы задач оптимального управления – задачи с фазовыми и смешанными ограничениями. Построенная Дубовицким и Милютиным теория ПМ представляет собой замечательное математическое достижение, потребовавшее филигранной техники исследования, использования известных и разработки новых нетривиальных результатов из теории функций действительного переменного и функционального анализа. Общая теория ПМ оказалась очень сложна; она была впоследствии несколько усовершенствована Милютиным и изложена им в его последней книге "Принцип максимума в общей задаче оптимального управления" (Москва, Физматлит, 2001), выход которой в свет автору не суждено было увидеть. Эти результаты, как и многое из того, что сделано Милютиным, намного опередили время. Однако и эта книга написана весьма жестко и лаконично; ее чтение требует большой и напряженной работы, и рассчитана она главным образом на специалистов, хорошо знакомых с предметом.

В то же время имеются важные классы задач оптимального управления, в которых формулировки и доказательства ПМ доступны студентам мехмата, прослушавшим курс анализа-III. Это, во-первых, классические задачи понтрягинского типа, а во-вторых, задачи с фазовыми и так называемыми *регулярными* смешанными ограничениями. Огромное количество специальной литературы, посвященной исследованию и применению тех и других задач, не оставляет сомнений в их практической значимости. Что же касается учебной литературы, то она, как правило, ограничивается рассмотрением лишь задач первого типа и почти не рассматривает вторых. Пионерские работы Дубовицкого и Милютина, позволившие исследовать задачи с фазовыми и регулярными смешанными ограничениями, до сих пор не нашли должного отражения ни в учебной литературе, ни в учебных курсах или спецкурсах мехмата, несмотря на их несомненную теоретическую и практическую ценность. [1] Цель предлагаемого учебного пособия – восполнить этот пробел.

В главе 1 рассматривается относительно простой с точки зрения доказательства ПМ, но весьма общий с точки зрения приложений класс задач *понтрягинского типа:* с произвольными концевыми ограничениями равенства и неравенства, но без фазовых и смешанных ограничений. Он включает в себя все задачи, обычно рассматриваемые в учебной литературе, в частности, задачи на фиксированном и нефиксированном отрезках времени, задачи с интегральными ограничениями и с произвольным множеством допустимых управлений, задачи оптимального быстродействия и др. Этот класс мы назвали для краткости *задачей* A. Мы приводим доказательство ПМ в задаче A с помощью приема замены времени (так называемой v-замены, введенной Дубовицким и Милютиным) в простейшей его модификации, позволяющей пройти доказательство кратчайшим путем, опираясь лишь на правило множителей Лагранжа в конечномерных задачах с ограничениями типа равенства и неравенства. По конструкции доказательство весьма близко к доказательствам, использующим конечные наборы игольчатых вариаций (пакеты иголок) с последующей "организацией" полученных "частичных" ПМ, но в техническом отношении использование замены времени представляется нам наиболее удобной реализацией идеи пакета иголок. Приведенное в главе 1 доказательство принадлежит А.А.Милютину и было рассказано им на одном из последних заседаний его семинара по теории оптимального управления. Нам представляется, что это доказательство может быть включено в семестровый учебный курс вариационного исчисления и оптимального управления; более того, такой опыт уже имеется. Оно может сыграть роль сравнительно простого "канонического" доказательства ПМ для понтрягинского класса задач.

После того как ПМ в задаче A получен, рассматриваются те формы, которые он принимает в некоторых более узких классах задач, а также в некоторых задачах, по форме не похожих на задачу A, но сводящихся к ней после некоторой переписки. Кроме того, вводятся важные понятия понтрягинского минимума и понтрягинской экстремали управляемой системы, и уточняется зависимость одного из условий ПМ ("закона сохранения энергии") от остальных.

В главе 2 дается изложение схемы Дубовицкого–Милютина для абстрактных задач на экстремум с ограничениями в банаховых пространствах. Здесь же собраны все необходимые сведений из функционального анализа. В первую очередь, это элементы выпуклого анализа: теорема об отделимости двух выпуклых множеств и ее обобщение на случай произвольного конечного числа множеств, теоремы о сублинейных функционалах и их опорных. Кроме того, при работе с ограничениями типа равенства важную роль играет классическая теорема Люстерника о касательном подпространстве к множеству нулей нелинейного оператора и ее обобщения – теоремы о накрывании и об оценке расстояния до множества нулей оператора (с ними связано недавно появившееся понятие метрической регулярности оператора). Завершается глава 2 получением правила множителей Лагранжа для абстрактной задачи с гладкими ограничениями типа равенства и негладкими ограничениями типа неравенства в банаховом пространстве. (Необходимость включения негладких неравенств в общую схему обусловлена тем, что в задачах оптимального управления фазовые и смешанные ограничения неравенства по существу

[1] Исключение составляет курс лекций Гирсанова [7], в котором в ясной и доступной форме изложены идеи первых работ Дубовицкого и Милютина. Из научной литературы отметим хорошо известную монографию Иоффе и Тихомирова [15], в которой результаты работ Дубовицкого и Милютина по ПМ нашли частичное отражение. Задачи со смешанными ограничениями в обеих книгах отсутствуют.

задаются негладкими функционалами в соответствующих пространствах.) Доказательство проводится по схеме Дубовицкого–Милютина.

В целом содержание глав 1 и 2 представляет собой введение в предмет "Оптимальное управление (Теория экстремума)", и может послужить основой для односеместрового учебного курса.

Далее, в главе 3, мы переходим к изучению *общей регулярной задачи* — задачи с фазовыми и регулярными смешанными ограничениями. Смешанным называется поточечное ограничение на фазовую переменную и управление. Под регулярными смешанными ограничениями мы понимаем такие, у которых в каждой точке градиенты по управлению ограничений равенства и активных ограничений неравенства (то есть тех, на границе которых находится данная точка) линейно-позитивно независимы (независимы с неотрицательными коэффициентами при градиентах неравенств). Начинается глава с рассмотрения специальных вопросов функционального анализа в пространствах C и L_∞, которые необходимы для исследования общей регулярной задачи: приводятся некоторые свойства самих этих пространств (в том числе дается формулировка теоремы Иосиды–Хьюитта о разложении линейного непрерывного функционала над L_∞ в сумму абсолютно непрерывного и сингулярного функционалов), изучается оператор равенств задачи и производные по направлению функционалов, задающих фазовые и смешанные ограничения неравенства, а также вводится понятие линейно-позитивно независимой системы вектор-функций в пространстве L_∞ и изучаются свойства таких систем. Устанавливается ключевой для дальнейшего факт, что уравнение Эйлера–Лагранжа для таких систем не содержит сингулярных составляющих.

Затем рассматриваются необходимые условия слабого минимума в регулярной задаче с гладкими ограничениями, а именно, доказывается так называемый локальный ПМ (или уравнение Эйлера–Лагранжа) — необходимое условие первого порядка для слабого минимума. Получение локального ПМ есть реализация общей схемы Дубовицкого–Милютина для данного класса задач. В доказательстве используются как абстрактные результаты и теоремы главы 2, так и специальные результаты главы 3, установленные ранее.

Глава 4 посвящена доказательству ПМ в общей регулярной задаче как необходимого условия первого порядка для сильного (а точнее, для понтрягинского) минимума. Доказательство проводится на основе результатов третьей главы и использует "вариации скольжения", соответствующие овыпуклению множества скоростей управляемой системы. Этот прием (также предложенный Милютиным), довольно естественный и простой на первый взгляд, нуждается в серьезном обосновании — а именно, он существенно опирается на специальную аппроксимационную теорему о корректности расширения исходной управляемой системы при переходе к скользящим режимам. Доказательство этой теоремы, весьма непростое, отнесено в главу 5 (Приложение); оно основывается в свою очередь на одном нелокальном варианте теоремы об оценке расстояния до множества нулей нелинейного оператора, представляющем и самостоятельный интерес.

Все содержание книги построено на записях лекций и семинаров нашего учителя Алексея Алексеевича Милютина, на его собственных публикациях и совместных публикациях с А.Я.Дубовицким. В книге частично использованы и наши совместные публикации с А.А.Милютиным. Главы 1, 2 и отчасти глава 3 представляют собой переработанные и дополненные материалы курсов лекций, прочитанных Осмоловским на мехмате МГУ в 2000 и 2001 годах. Главы 1, 2 написаны в основном Осмоловским, а глава 3 — нами совместно. Главы 4, 5 написаны Дмитруком; а главы 3, 4 и частично глава 2 читались им на мехмате в 2004 году в качестве полугодового спецкурса.

Список литературы, приведенный в конце книги, ни в коей мере не претендует на полноту, а лишь отражает круг публикаций, в той или иной степени близких к идеям настоящей книги и использовавшихся нами в процессе изучения принципа максимума и работы с ним. Мы также не приводим практически никаких исторических комментариев, которые сами по себе могли бы представлять интерес; это обусловлено ограниченностью объема данной книги и ее учебным характером.

Мы выражаем искреннюю благодарность Г.Ю. Данкову, который был связан с А.А. Милютиным многолетними дружескими отношениями, и по инициативе которого была написана эта книга.

Мы также благодарим студентов мехмата Михаила Шеблаева, Анну Фещук, Юрия Титова, Алексея Купавского и Олега Малько за помощь в оформлении первых двух глав рукописи.

Работа выполнялась при поддержке РФФИ, проект 04-01-00482, и Программы по ведущим научным школам, проект НШ-304.2003.1.

А.В. Дмитрук, Н.П. Осмоловский

Июль 2004 г.

Глава 1

Принцип максимума Понтрягина в классических задачах оптимального управления

1.1 Задачи A и B

1. Пример задачи оптимального управления Материальная точка движется по плоскости под воздействием силы. Сила может иметь любое направление, но ограничена по величине. Какую силу надо приложить к точке в каждый момент времени, чтобы за кратчайшее время точка перешла бы из состояния A в состояние B? Под состоянием точки понимается ее положение и вектор скорости.

Формализуем задачу. Положение точки характеризуется ее координатами (x_1, x_2). Действующую в данный момент силу обозначим через $(u_1, u_2)(t)$. Массу точки считаем равной единице. Если $u_1 = u_1(t)$ и $u_2 = u_2(t)$ заданы, то перемещение точки на плоскости подчинено системе дифференциальных уравнений второго порядка

$$\ddot{x}_1 = u_1(t), \qquad \ddot{x}_2 = u_2(t).$$

При этом $u_1^2 + u_2^2 \leqslant \mathrm{const}$. Здесь t — независимая переменная — время, $t \in [t_0, t_1]$. Отрезок $[t_0, t_1]$ не фиксирован. Требуется минимизировать $t_1 - t_0$.

Мы всегда будем представлять систему дифференциальных уравнений в виде системы *первого порядка*, вводя, если потребуется, дополнительные переменные. Нашу систему запишем в виде $\dot{x} = y, \quad \dot{y} = u(t)$, где $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2)$, $u = (u_1, u_2)$. Новая переменная y есть скорость точки. Итак, задача имеет вид

$$t_1 - t_0 \to \min; \qquad \dot{x} = y, \quad \dot{y} = u(t), \quad u_1^2 + u_2^2 \leqslant \mathrm{const},$$

$$x(t_0) = a^0, \quad y(t_0) = b^0, \quad x(t_1) = a^1, \quad y(t_1) = b^1.$$

Если векторы b^0 и b^1 (начальная и конечная скорости точки) коллинеарны отрезку $[a^0, a^1]$, соединяющему начальное и конечное положения точки, то задача имеет простое решение, и для ее решения не нужно знать теорию оптимального управления. [1] Однако

[1] В этом случае силу надо выбирать коллинеарной отрезку $[a^0, a^1]$, то есть по сути переменные x, y и u оказываются одномерными. Одномерный случай для x, y и u (при условии что конечное состояние $(x(t_1), y(t_1))$ — нулевое) был впервые рассмотрен в качестве примера в книге Понтрягина и др. [1], и затем стал популярной иллюстрацией для применения принципа максимума.

в общем случае решение оказывается неочевидным. Еще более неочевидным оно становится, если в задачу ввести дополнительное ограничение: препятствие (например, круг), которое при движении точки требуется обойти, или ограничить по величине скорость точки. Подобные ограничения мы будем называть фазовыми. Наша цель - дать единый алгоритм, с помощью которого можно решать (но не обязательно решить!) любую задачу оптимального управления.

2. Управляемая система. Управляемой системой будем называть пару соотношений

$$\dot{x} = f(t, x, u), \quad u \in U. \tag{1.1}$$

Здесь $U \subset \mathbb{R}^m$ — произвольное множество, которому должно принадлежать *управление* $u = u(t)$ в каждый момент времени t. Таким образом, U задает *ограничение на управление.* Компоненты вектора $u = (u_1, \dots, u_m)$ также называют *управлениями* или *управляющими параметрами.* Вектор $x = (x_1, \dots, x_n)$ характеризует *состояние* управляемого объекта. Его также называют *фазовой переменной*, или *фазой.* Уравнение $\dot{x} = f(t, x, u)$ описывает движение объекта управления при выбранном управлении $u = u(t)$.

Если в момент t_0 задано начальное состояние $x(t_0) = a$ и задано управление $u(t)$ на отрезке $[t_0, t_1]$, то $x(t)$ однозначно определяется (при некоторых естественных условиях на функцию f) как решение задачи Коши

$$\dot{x} = f(t, x, u(t)), \qquad x(t_0) = a.$$

Относительно функции f мы будем предполагать, что *она сама и ее частные производные* f_x *и* f_t *непрерывны по совокупности переменных.*

Пару функций $x(t), u(t)$ определенных на отрезке $[t_0, t_1]$, будем называеть *траекторией управляемой системы* (1.1) (или *управляемым процессом*), если $x(t) : [t_0, t_1] \to \mathbb{R}^n$ — абсолютно непрерывная функция, $u(t) : [t_0, t_1] \to \mathbb{R}^m$ — ограниченная измеримая функция, и при этом почти всюду (п.в.) на $[t_0, t_1]$ выполнены условия

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)), \qquad u(t) \in U.$$

Заметим, что данное определение позволяет менять $u(t)$ на множестве меры нуль. (Называя функцию $u(t)$ ограниченной измеримой, мы имели в виду измеримость ее по Лебегу и существенную ограниченность). Для краткости мы будем полагать $w = (x, u)$.

С траекторией $(x(t), u(t) \mid t \in [t_0, t_1])$ мы будем связывать набор концевых значений $p = (t_0, x_0, t_1, x_1)$, где $x_0 = x(t_0)$, $x_1 = x(t_1)$.

Удобно ввести открытое множество $\mathcal{Q} \subset \mathbb{R}^{1+n+m}$ и предполагать, что f задана и непрерывна вместе с производными f_x и f_t не во всем пространстве, а лишь на множестве $\mathcal{Q}$, а в определении управляемой системы добавить условие

$$(t, x, u) \in \mathcal{Q}\,. \tag{1.2}$$

Предполагается, что это условие выполнено для траектории $(x(t), u(t))$ п.в. на $[t_0, t_1]$. Более того, будем предполагать, что для каждой траектории существует компакт $\Omega \subset \mathcal{Q}$ (зависящий от траектории) такой, что

$$(t, x(t), u(t)) \in \Omega \qquad \text{п.в. на } [t_0, t_1].$$

Это означает, что траектория проходит в $\mathcal{Q}$ на положительном расстоянии от границы $\partial\mathcal{Q}$. Множество $\mathcal{Q}$ следует понимать не как ограничение, а как область определения ("жизненное пространство") управляемой системы; вне этого множества управляемая система не рассматривается. Введение $\mathcal{Q}$ не вносит никаких дополнительных трудностей при получении условий оптимальности. Чтобы избежать лишних оговорок, мы полагаем ниже $\mathcal{Q} = \mathbb{R}^{1+m+n}$.

3. Каноническая задача оптимального управления понтрягинского типа: задача A. Эта задача ставится следующим образом: минимизировать функцию начального и конечного состояний, а также начального и конечного моментов времени

$$J = F_0(t_0, x_0, t_1, x_1) \to \min,$$

где по определению

$$x_0 = x(t_0), \qquad x_1 = x(t_1),$$

при ограничениях на t_0, x_0, t_1, x_1 заданных в виде неравенств и равенств

$$F(t_0, x_0, t_1, x_1) \leqslant 0, \qquad K(t_0, x_0, t_1, x_1) = 0,$$

которым должна удовлетворять траектория $(x(t), u(t) \mid t \in [t_0, t_1])$ управляемой системы

$$\dot{x} = f(t, x, u), \quad u \in U.$$

Отрезок $[t_0, t_1]$ *á priori* не фиксирован. Здесь $F_0 : \mathbb{R}^{2+2n} \to \mathbb{R}$,

$$F : \mathbb{R}^{2+2n} \to \mathbb{R}^k, \qquad F = (F_1, \ldots, F_k),$$

$$K : \mathbb{R}^{2+2n} \to \mathbb{R}^q, \qquad K = (K_1, \ldots, K_q),$$

$$f : \mathbb{R}^{1+n+m} \to \mathbb{R}^n, \qquad f = (f_1, \ldots, f_n).$$

Снова полагая для краткости $p = (t_0, x_0, t_1, x_1)$, перепишем задачу в виде:

$$J = F_0(p) \to min, \;\; F(p) \leqslant 0, \;\; K(p) = 0, \tag{1.3}$$

$$\dot{x} = f(t, x, u), \qquad u \in U. \tag{1.4}$$

Предполагается, что F_0, F, K *— функции класса* $\mathcal{C}^1$, и, как было сказано, f *непрерывна вместе с производными* f_x *и* f_t. Никаких предположений относительно множества $U \subset \mathbb{R}^m$ не делается. [2]

Функцию F_0 называют *целевой функцией*, или *функционалом задачи*, или просто *функционалом.* Функционал и ограничения (1.3) будем называть *концевым блоком задачи.* Таким образом, все поточечные ограничения задачи образуют управляемую систему (1.4), а кроме них имеется еще концевой блок.

Мы уже отметили, что свойства f можно было бы предполагать выполненными на некотором открытом множестве $\mathcal{Q}$, соответственно уточнив понятие допустимой траектории. Аналогично можно было бы считать, что F_0, F, K определены и непрерывно

[2] Более того, можно считать (как это делается в книге [1]), что U не подмножество в $\mathbb{R}^n$, а произвольное хаусдорфово топологическое пространство. Однако нам не известны случаи, когда бы это предположение использовалось на практике.

дифференцируемы на некотором открытом множестве $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^{2+2n}$. Мы этого не делаем, чтобы не отвлекаться на несущественные детали.

Если $F_0(p) = t_1 - t_0$, то есть требуется минимизировать время, то задача называется задачей *быстродействия*; при этом часто t_0 фиксируют, полагая $t_0 = 0$ (то есть $K_i(p) = t_0$ при некотором i). Может оказаться, что в задаче фиксирован левый конец $x(t_0) = a$ или правый $x(t_1) = b$, или оба. Такие условия задаются с помощью концевого ограничения: $K_i = x_0 - a = 0$ или $K_j = x_1 - b = 0$ при некоторых i, j. С помощью равенства $K = 0$ можно фиксировать как t_0, так и t_1, или t_0 и t_1, одновременно. В последнем случае имеем задачу на фиксированном отрезке времени. Бывают постановки, когда из точки $x(t_0) = a$ надо попасть на многообразие $\varphi(x(t_1)) = 0$ или наоборот, или с многообразия на многообразие. Все эти постановки охватываются равенством $K(p) = 0$.

Наконец, пусть в функционале задачи присутствует также интегральный член

$$J_\Phi = F_0(p) + \int_{t_0}^{t_1} \Phi(t, x, u)dt,$$

где Φ непрерывна вместе со своими производными Φ_t и Φ_x. Тогда его можно переписать как концевой с помощью введения дополнительной фазовой переменой y:

$$\dot{y} = \Phi(t, x, u) \Rightarrow J_\Phi = F_0(p) + y_1 - y_0,$$

где $y_1 = y(t_1)$, $y_0 = y(t_0)$. Заметим, что при этом меняется и управляемая система, приобретая вид:

$$\dot{x} = f(t, x, u), \qquad \dot{y} = \Phi(t, x, u), \qquad u \in U.$$

Указаный прием существенно расширяет круг задач, охватываемый канонической задачей. Некоторые другие задачи, также сводящиеся к задаче A, будут рассмотрены в дальнейшем.

Траектория $(x(t), u(t) \mid t \in [t_0, t_1])$ называется *допустимой в задаче* A, если $x(t)$ абсолютно непрерывна на $[t_0, t_1]$, $u(t)$ ограничена и измерима на $[t_0, t_1]$ и выполнены все ограничения задачи. Допустимая траектория называется *оптимальной*, если среди всех допусимых траекторий она доставляет наименьшее значение функционалу. Таким образом, траектория оптимальна, если она доставляет абсолютный (глобальный) минимум. Более или менее ясно, что таким понятием не всегда удобно пользоваться. Поэтому в дальнейшем мы введем понятие оптимальности в более узком смысле. По аналогии с классическим вариационным исчислением будут определены понятия слабого и сильного минимума, а затем сравнительно новое понятие понтрягинского минимума, занимающего промежуточное положение между сильным и слабым.

Наша цель сейчас — исследовать каноническую задачу A и получить в ней необходимое условие оптимальности (понимаемой пока в глобальном смысле) — принцип максимума Понтрягина. Задачу A часто называют также задачей *понтрягинского типа*, поскольку именно такие задачи (хотя и не в той общности, что у нас) привели Л.С.Понтрягина и его учеников к разработке и доказательству принципа максимума (см. [1]).

Главное, что отличает задачи оптимального управления от задач вариационного исчисления – это присутствие ограничения $u \in U.$ Как уже подчеркивалось, в качестве U может выступать *любое* множество, например, состоящее из конечного числа точек. Это ограничение является, как говорят, "негладким". Стандартные методы классического вариационного исчисления для таках задач не проходят. Поэтому нужны новые специальные приемы для исследования задач оптимального управления. Таких приемов имеется несколько, и они приводят к различным доказательствам принципа максимума. В этой главе мы будем следовать приему и доказательству, рассказанному А.А.Милютиным на его семинаре по оптимальному управлению. Это доказательство представляется нам одним из наиболее простых.

4. Задача B . Оказывается, вовсе не обязательно рассматривать задачу A в полной общности, ибо имеется прием сведения ее к более простой задаче — задаче B . Последняя имеет вид :

$$J = F_0(x_0, x_1) \to min, \quad F(x_0, x_1) \leqslant 0, \quad K(x_0, x_1) = 0,$$

$$\dot{x} = f(x, u), \qquad u \in U,$$

где, как и прежде, $x_0 = x(t_0)$, $x_1 = x(t_1)$.

Фунции F_0, F, K непрерывно дифференцируемы в $\mathbb{R}^{2n}$, f непрерывна вместе с производной f_u в $\mathbb{R}^{n+m}$.

Отрезок $[t_0, t_1]$ по-прежнему *не фиксирован.* Таким образом, задача B отличается от задачи A лишь тем, что теперь f не зависит от t явно, т.е. система $\dot{x} = f$ является *автономной* и, кроме того, F_0, F, K не зависят от t_0, t_1 .

В задаче B траектории допускают сдвиг по времени. Действительно, если $(x(t), u(t) \mid t \in [t_0, t_1])$ — допустимая траектория задачи B , то при любом вещественном θ траектория

$$(x(t-\theta), u(t-\theta) \mid \; t \in [t_0+\theta, t_1+\theta])$$

— допустимая траектория той же задачи с теми же концами x_0, x_1 . Это касается и оптимальных траекторий задачи B .

Хотя задача B и является частным случаем задачи A, любую задачу A можно привести к виду B. Это достигается с помощью следующего приема. К системе $\dot{x} = f(t, x, u)$ добавим уравнение $\frac{dt}{d\tau} = 1$, считая, что $t = t(\tau)$ - новая фазовая переменая. Функции $x(\cdot)$ и $u(\cdot)$ также считаем зависящими от τ : $x = x(\tau), u = u(\tau)$. Положим

$$t_0 = t(\tau_0), \quad x_0 = x(\tau_0), \quad t_1 = t(\tau_1), \quad x_1 = x(\tau_1). \tag{1.5}$$

В результате приходим к следующей задаче:

Задача A'

$$J = F_0(t_0, x_0, t_1, x_1) \to min, \quad F(t_0, x_0, t_1, x_1) \leqslant 0, \quad K(t_0, x_0, t_1, x_1) = 0,$$

$$\frac{dx}{d\tau} = f(t, x, u), \quad \frac{dt}{d\tau} = 1, \quad u \in U,$$

где $t(\tau), x(\tau)$ — фазовые переменные, $u(\tau)$ — управление, $\tau \in [\tau_0, \tau_1]$ — нефиксированный отрезок, концы t_0, x_0, t_1, x_1 определены условиями (1.5).

Ясно, что задача A' - того же типа, что и задача B .

Какова связь между задачами A и A' ? Пусть $(x(t), u(t) \mid t \in [t_0, t_1])$ − допустимая траектория задачи A. Ее концы – это набор (t_0, x_0, t_1, x_1) , где $x_0 = x(t_0)$, $x_1 = x(t_1)$. Положим $\tau_0 = t_0$, $\tau_1 = t_1$, $t(\tau) = \tau$. Тогда $(t(\tau), x(\tau), u(\tau) \mid \tau \in [\tau_0, \tau_1])$ − допустимая траектория задачи A' с теми же концами (t_0, x_0, t_1, x_1) , определенными условиями (1.5).

Обратно, пусть имеется допустимая траектория $(t(\tau), x(\tau), u(\tau) \mid \tau \in [\tau_0, \tau_1])$ в задаче A' с концами (t_0, x_0, t_1, x_1) . Тогда $t(\tau) = \tau + \mathrm{const}$. Сделав, если надо, сдвиг по τ, константу можно занулить, т.е. перейти к новой допустимой траектории в задаче A' с теми же концами, но с функцией $t(\tau) = \tau$. Для этой траектории положим $t_0 = \tau_0$, $t_1 = \tau_1$. Тогда $(x(t), u(t) \mid t \in [t_0, t_1])$ — допустимая траектории задачи A с теми же концами (t_0, x_0, t_1, x_1) , где $x_0 = x(t_0)$, $x_1 = x(t_1)$.

Указаное соответствие между допустимыми траекториями задач A и A' имеется и для оптимальных траекторий. Поэтому, получив необходимое условие оптимальности в задаче B , мы легко перепишем его и как необходимое условие в задаче A .

Переписка задач с помощью замены переменных (возможно, необратимой!) таит в себе большие возможности, часто неожиданные. Уже столь простой прием замены независимой переменной t принес заметную пользу: мы получили автономную задачу. Более серьезная замена времени $t = t(\tau)$ позволит свести задачу B к конечномерной задаче с неравенствами и равенствами, а затем воспользоваться правилом множителей Лагранжа. В конечном итоге это приведет к доказательству принципа максимума. Замена будет связана с уравнением $\frac{dt}{d\tau} = v$, где $v(\tau) -$ неотрицательная (но не всюду положительная) функция и, следовательно, $t = t(\tau)$ – монотонно неубывающая (но не строго возрастающая) функция. Подобная необратимая замена, превращающая время t в фазовую переменную, была предложена А.Я.Дубовицким и использовалась в его совместных работах с А.А.Милютиным; она была названа ими v -заменой. (Нетривиальный момент здесь в том, что малые вариации нового управления $v(\tau)$ приводят к вариациям типа игольчатых для исходного управления $u(t)$.) Простейший вариант такой v -замены мы сейчас рассмотрим.

1.2 Расширение управляемой системы задачи B

1. v **-замена.** Рассмотрим управляемую систему задачи B :

$$\dot{x} = f(x, u), \qquad u \in U, \tag{1.6}$$

траекторией которой является пара $(x(t), u(t) \mid t \in [t_0, t_1])$, где $t_0 < t_1$ — произвольны; $x(t)$ абсолютно непрерывна, а $u(t)$ ограничена и измерима.

Определим теперь *расширенную управляемую систему* задачи B :

$$\frac{dx}{d\tau} = v f(x, u), \quad \frac{dt}{d\tau} = v, \quad u \in U, \quad v \geq 0. \tag{1.7}$$

Здесь τ — новая независимая переменная. Траекторией системы (1.7) по определению является набор функций

$$(t(\tau), x(\tau), u(\tau), v(\tau) \mid \tau \in [\tau_0, \tau_1])$$

таких, что $t(\tau), x(\tau)$ — абсолютно непрерывны, $u(\tau)$, $v(\tau)$ — ограничены и измеримы, условия (1.7) выполнены почти всюду на $[\tau_0, \tau_1]$, $\tau_0 < \tau_1$ - произвольны.

Концы траектории системы (1.6) - это t_0, t_1 и значения $x_0 = x(t_0), x_1 = x(t_1)$. Концы траектории системы (1.7) — это τ_0, τ_1 и значения $x_0 = x(\tau_0)$, $x_1 = x(\tau_1)$, $t_0 = t(\tau_0)$, $t_1 = t(\tau_1)$.

В дальнейшем мы ограничимся рассмотрением лишь таких траекторий расширенной системы, у которых $v(\tau)$ — *кусочно постоянна*, т.е. имеется разбиение $[\tau_0, \tau_1]$ на конечное число интервалов, примыкающих друг к другу, на каждом из которых $v(\tau)$ постоянна. Связь между такими траекториями расширенной системы и траекториями исходной управляемой системы задачи B устанавливает следующая лемма.

Лемма 1. *Для любой траектории системы (1.7) с кусочно постоянной v существует траектория системы (1.6) с теми же x_0, x_1 .*

Для доказательства леммы нам потребуются два предложения.

Пусть функция $\tilde{v}(\tau) : [\tau_0, \tau_1] \to \mathbb{R}$ — кусочно постоянна и неотрицательна, t_0 — число, и функция $\tilde{t}(\tau)$ удовлетворяет условиям

$$\frac{d\tilde{t}(\tau)}{d\tau} = \tilde{v}(\tau), \quad \tilde{t}(\tau_0) = t_0,$$

то есть

$$\tilde{t}(\tau) = t_0 + \int_{\tau_0}^{\tau} \tilde{v}(s)ds.$$

Таким образом,

$$\tilde{t}(\tau) : [\tau_0, \tau_1] \overset{\text{на}}{\to} [t_0, t_1]$$

— кусочно-линейная неубывающая функция. Пусть $\Delta^1, \Delta^2, \ldots, \Delta^s$ — набор всех отрезков постоянства функции $\tilde{t}(\tau)$, расположенных в естественном порядке. Обозначим

$$\mathcal{M}_0 = \bigcup_1^s \Delta^k, \qquad \mathcal{M}_+ = [\tau_0, \tau_1] \backslash \mathcal{M}_0.$$

Очевидно, $\mathcal{M}_+$ состоит из конечного числа интервалов и (или) полуинтервалов.

Пусть $\tilde{t}(\Delta^k) = \{t^k\}, \quad k = 1, \ldots, s$ — значения функции $\tilde{t}$ на отрезках постоянства. Положим

$$\mathcal{N}_0 = \{t^1, \ldots, t^s\}, \qquad \mathcal{N}_+ = [t_0, t_1] \backslash \mathcal{N}_0.$$

Ясно, что

$$\mathcal{N}_0 = \tilde{t}(\mathcal{M}_0), \qquad \mathcal{N}_+ = \tilde{t}(\mathcal{M}_+).$$

Далее, пусть $\tilde{\tau}(t) : [t_0, t_1] \to [\tau_0, \tau_1]$, такова, что $\tilde{t}(\tilde{\tau}(t)) = t \quad \forall t \in [t_0, t_1]$, т. е. $\tilde{\tau}$ является правой обратной к $\tilde{t}(\tau)$. Поскольку $\tilde{t}(\tau)$ отображает "на", то правая обратная существует. Более того, она определена однозначно всюду, кроме конечного множества точек $t^1, \ldots, t^s$, составляющих множество $\mathcal{N}_0$. Значение в каждой точке t^k можно выбрать произвольно из отрезка $\Delta^k := [\tau_0^k, \tau_1^k]$, $k = 1, \ldots, s$, являющегося полным прообразом $\tilde{t}^{-1}(t_k)$. точки t_k . Для определенности положим $\tilde{\tau}(t^k) = \tau_0^k$, $k = 1, \ldots, s$. Тогда $\tilde{\tau}(t)$ *непрерывна слева.*

Следующие два предложения, используемые в доказательстве леммы 1, будем называть предложениями о монотонных кусочно линейных функциях. В них участвуют функции $\tilde{t}(\tau)$, $\tilde{\tau}(t)$ и $\tilde{v}(\tau)$, определенные выше.

Предложение 1. *Пусть $\tilde{u}(\tau) : [\tau_0, \tau_1] \to \mathbb{R}^m$ — ограниченая измеримая функция такая, что $\tilde{u}(\tau) \in U$ п.в. на $[\tau_0, \tau_1]$. Положим $u(t) = \tilde{u}(\tilde{\tau}(t))$, $t \in [t_0, t_1]$.*

Тогда $u(t)$ — ограниченная измеримая функция такая, что $u(t) \in U$ п.в. на $[t_0, t_1]$.

Доказательство. Достаточно проверить это утверждение на произвольном интервале множества $\mathcal{N}_+$. Но на таком интервале $\tilde{\tau}(t)$ — линейная возрастающая функция, и тогда измеримость, существенная ограниченность и условие $u(t) \in U$ п.в. представляются очевидными.

Предложение 2. *Пусть* $\tilde{x}(\tau) : [\tau_0, \tau_1] \to \mathbb{R}^n$ *— липшицева функция такая, что*

$$\frac{d\tilde{x}(\tau)}{d\tau} = \tilde{v}(\tau)\tilde{\varphi}(\tau) \quad \textit{п.в. на} \quad [\tau_0, \tau_1], \tag{1.8}$$

где $\tilde{\varphi}(\tau) : [\tau_0, \tau_1] \to \mathbb{R}^n$ *— ограниченная измеримая функция, а* $\tilde{v}(\tau)$ *— указанная выше кусочно-постоянная неотрицательная функция. Положим*

$$x(t) = \tilde{x}(\tilde{\tau}(t)), \quad t \in [t_0, t_1].$$

Тогда $x(t) : [t_0, t_1] \to \mathbb{R}^n$ *— липшицева функция такая, что*

$$x(t_0) = \tilde{x}(\tau_0), \quad x(t_1) = \tilde{x}(\tau_1). \tag{1.9}$$

Более того,

$$\frac{dx(t)}{dt} = \varphi(t) \quad \textit{п.в. на} \quad [t_0, t_1], \tag{1.10}$$

где

$$\varphi(t) = \tilde{\varphi}(\tilde{\tau}(t)), \quad t \in [t_0, t_1].$$

Доказательство. а) Покажем, что $x(t)$ — липшицева функция. На любом интервале множества $\mathcal{N}_+$ функция $\tilde{\tau}(t)$ линейна и, следовательно, $x(t) = \tilde{x}(\tilde{\tau}(t))$ — липшицева (ибо $\tilde{x}(\cdot)$ — липшицева). Следовательно, достаточно лишь показать, что $x(t)$ непрерывна в каждой точке t^k множества $\mathcal{N}_0$ (несмотря на то, что $\tilde{\tau}(t)$ в каждой такой точке разрывна). Отсюда последует липшицевость $x(t)$.

Заметим, что в силу уравнения (1.8) функция $\tilde{x}(\tau)$ постоянна на каждом Δ^k ($k = 1, \ldots, s$), ибо $\tilde{v}(\tau) = 0$ на Δ^k. Поэтому

$$\tilde{x}(\tau_0^k) = \tilde{x}(\tau_1^k), \quad k = 1, \ldots, s. \tag{1.11}$$

Возьмем произвольную точку $t^k \in \mathcal{N}_0$. Проверим непрерывность $x(t)$ в точке t^k. Имеем

$$x(t^k - 0) \stackrel{def}{=} \tilde{x}(\tilde{\tau}(t^k - 0)) = \tilde{x}(\tilde{\tau}(t^k)) \stackrel{def}{=} x(t^k), \tag{1.12}$$

так как $\tilde{\tau}$ непрерывна слева. При этом $\tilde{\tau}(t^k) = \tau_0^k$. Следовательно,

$$x(t^k - 0) = \tilde{x}(\tau_0^k). \tag{1.13}$$

Далее,

$$x(t^k + 0) \stackrel{def}{=} \tilde{x}(\tilde{\tau}(t^k + 0)) = x(\tau_1^k), \tag{1.14}$$

так как $\tilde{\tau}(t^k + 0) = \tau_1^k$. Из (1.11)-(1.14) следует, что

$$x(t^k - 0) = x(t^k) = \tilde{x}(\tau_0^k) = \tilde{x}(\tau_1^k) = x(t^k + 0).$$

Итак, $x(t)$ непрерывна в каждой точке t^k , а, значит, липшицева на $[t_0, t_1]$.

б) Докажем свойство (1.9) — совпадение концов. Поскольку $\tilde{\tau}(t)$ непрерывна слева, то $\tilde{\tau}(t_0) = \tau_0$. Следовательно,

$$x(t_0) \stackrel{def}{=} \tilde{x}(\tilde{\tau}(t_0)) = \tilde{x}(\tau_0).$$

Если $\tau_1 \in \mathcal{M}_+$, то есть τ_1 не является концом последнего отрезка постоянства функции $\tilde{t}(\tau)$ (отрезка Δ^s), то $\tilde{\tau}(t_1) = \tau_1$ и, следовательно,

$$x(t_1) \stackrel{def}{=} \tilde{x}(\tilde{\tau}(t_1)) = \tilde{x}(\tau_1).$$

Если же τ_1 является правым концом отрезка $\Delta^s = [\tau_0^s, \tau_1^s]$, то $\tilde{\tau}(t_1) = \tau_0^s$ (поскольку $\tilde{\tau}$ непрерывна слева). Следовательно, $x(t_1) = \tilde{x}(\tilde{\tau}(t_1)) = \tilde{x}(\tau_0^s)$. Но в силу (1.11) $\tilde{x}(\tau_0^s) = \tilde{x}(\tau_1^s) = \tilde{x}(\tau_1)$. Таким образом, и в этом случае $x(t_1) = \tilde{x}(\tau)$.

Вообще можно доказать, что $x(\tilde{t}(\tau)) = \tilde{x}(\tau)\ \forall\, \tau \in [\tau_0, \tau_1]$ (докажите это свойство), откуда (1.9) следует, ибо $\tilde{t}(\tau_0) = t_0$ и $\tilde{t}(\tau_1) = t_1$.

в) Наконец, установим для $x(t) = \tilde{x}(\tilde{\tau}(t))$ свойство (1.10). Возьмем любой интервал $\omega \subset \mathcal{N}_+$ (он является 1:1 образом некоторого интервала $\Delta \subset \mathcal{M}_+$). Как мы знаем, на нем функция $\tilde{\tau}(t)$ строго возрастает (так как она является обратной к возрастающей функции $\tilde{t}(\tau)$). При этом

$$\frac{d\tilde{t}}{d\tau} = v, \qquad v = v(\Delta) > 0, \qquad \frac{d\tilde{\tau}}{dt} = \frac{1}{v},$$

а тогда по правилу дифференцирования сложной функции

$$\frac{dx(t)}{dt} = \frac{d\tilde{x}(\tau)}{d\tau}\frac{d\tilde{\tau}}{dt} = v\tilde{\varphi}(\tilde{\tau})\frac{1}{v} = \tilde{\varphi}(\tilde{\tau}(t)) = \varphi(t).$$

Итак, требуемое равенство (1.10) выполнено на любом интервале, содержащемся в $\mathcal{N}_+$, а поскольку $\mathcal{N}_+$ и состоит из конечного числа интервалов, то (1.10) выполнено на всем отрезке $[t_0, t_1]$, кроме конечного числа точек.

Доказательство леммы 1. Пусть $(\tilde{t}(\tau), \tilde{x}(\tau), \tilde{u}(\tau), \tilde{v}(\tau) \mid \tau \in [\tau_0, \tau_1])$ — траектория расширенной системы (1.7). Положим $t_0 = \tilde{t}(\tau_0)$, $t_1 = \tilde{t}(\tau_1)$, и пусть $\tilde{\tau}(t) : [t_0, t_1] \to [\tau_0, \tau_1]$ — правая обратная к $\tilde{t}(\tau)$, непрерывная слева. Положим

$$x(t) = \tilde{x}(\tilde{\tau}(t)), \quad u(t) = \tilde{u}(\tilde{\tau}(t)), \quad t \in [t_0, t_1].$$

Согласно Предложению 1, $u(t)$ — ограниченая измеримая функция такая, что $u(t) \in U$ п.в. на $[t_0, t_1]$. Согласно Предложению 2, $x(t)$ — липшицева функция на $[t_0, t_1]$, причем $x(t_0) = \tilde{x}(\tau_0)$, $x(t_1) = \tilde{x}(\tau_1)$,

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(x(t), u(t)) \text{ п.в. на } [t_0, t_1].$$

Последнее, в силу Предложения 2, вытекает из условий

$$\frac{d\tilde{x}(\tau)}{d\tau} = \tilde{v}(\tau) f(\tilde{x}(\tau), \tilde{u}(\tau)), \quad f(\tilde{x}(\tilde{\tau}(t)), \tilde{u}(\tilde{\tau}(t))) = f(x(t), u(t)).$$

Следовательно, $(x(t), u(t) \mid t \in [t_0, t_1])$ — траектория системы (1.6). □

2. Задача B и задача $\tilde{B}$, связь между ними. Рассмотрим снова задачу B:

$$J(x_0, x_1) \to min, \quad F(x_0, x_1) \leqslant 0, \quad K(x_0, x_1) = 0, \quad \dot{x} = f(x, u), \quad u \in U,$$

где $x_0 = x(t_0)$, $x_1 = x(t_1)$, $x(t)$ — липшицева, а $u(t)$ - ограниченная измеримая на $[t_0, t_1]$, причем t_0, t_1 - свободны.

Наряду с задачей B будем рассматривать задачу $\tilde{B}$:

$$J(x_0, x_1) \to min, \quad F(x_0, x_1) \leqslant 0, \quad K(x_0, x_1) = 0,$$

$$\frac{dx}{d\tau} = vf(x, u), \quad \frac{dt}{d\tau} = v, \quad v \geqslant 0, \quad u \in U,$$

где $x_0 = x(\tau_0)$, $x_1 = x(\tau_1)$, функции $x(\tau), t(\tau)$ абсолютно непрерывны, $u(\tau)$ — ограничена и измерима, $v(\tau)$ — *кусочно постоянна* (!), $\tau \in [\tau_0, \tau_1]$, концы τ_0, τ_1 — фиксированы. Здесь x и t — фазовые переменные, u и v — управления. При $v \equiv 1$ и $\tau_0 = t_0$ траектория задачи $\tilde{B}$ превращается в траекторию задачи B, поэтому мы будем называть задачу $\tilde{B}$ *расширением задачи* B.

Теорема 1 (о связи задач B и $\tilde{B}$). *Пусть* $\Upsilon = (x(t), u(t) \mid t \in [t_0, t_1])$ *— оптимальная траектория задачи* B. *Пусть* $\tilde{\Upsilon} = (\tilde{t}(\tau), \tilde{x}(\tau), \tilde{u}(\tau), \tilde{v}(\tau) \mid \tau \in [\tau_0, \tau_1])$ *— допустимая траектория задачи* $\tilde{B}$ *такая, что* $\tilde{x}(\tau_0) = x(t_0)$, $\tilde{x}(\tau_1) = x(t_1)$.
Тогда $\tilde{\Upsilon}$ *– оптимальная траектория задачи* $\tilde{B}$.

Доказательство. Пусть $\tilde{\Upsilon}$ не оптимальна в задаче $\tilde{B}$. Тогда найдется допустимая траектория задачи $\tilde{B}$

$$\tilde{\Upsilon}' = (\tilde{t}'(\tau), \tilde{x}'(\tau), \tilde{u}'(\tau), \tilde{v}'(\tau) \mid \tau \in [\tau_0, \tau_1])$$

с меньшим начением целевой функции:

$$J(\tilde{x}'(\tau_0), \tilde{x}'(\tau_1)) < J(\tilde{x}(\tau_0), \tilde{x}(\tau_1)).$$

(здесь штрихи не означают дифференцирование). По лемме 1 найдется траектория управляемой системы задачи B: $\Upsilon' = (x'(t), u'(t) \mid t \in [t'_0, t'_1])$ такая, что $x'(t'_0) = \tilde{x}'(\tau_0)$, $x'(t'_1) = \tilde{x}'(\tau_1)$. Тогда Υ' — допустимая траектория задачи B (поскольку $\tilde{\Upsilon}'$ допустима в задаче $\tilde{B}$) и при этом $J(x'(t'_0), x'(t'_1)) < J(x(t_0), x(t_1))$. Значит, Υ не оптимальна в задаче B. □

Мы провели важную подготовительную работу перед доказательством принципа максимума, связав между собой задачи B и $\tilde{B}$.

Перед этим доказательством сформулируем и докажем еще один важный результат, относящийся к обыкновенным дифференциальным уравнениям.

1.3 Система уравнений в вариациях

Напомним некоторые определения из функционального анализа.

1. Производная Фреше нелинейного оператора. Пусть X, Y - банаховы пространства. Оператор $g: X \to Y$ называют *дифференцируемым по Фреше* в точке x_0, если существует линейный оператор $A: X - Y$ такой, что

$$g(x_0 + h) = g(x_0) + Ah + \tilde{y}(h)\|h\|, \quad \text{где } \|\tilde{y}(h)\| \to 0 \text{ при } \|h\| \to 0.$$

Оператор A называют *производной Фреше оператора в точке* x_0 и обозначают $A = g'(x_0)$.

Оператор называют *непрерывно дифференцируемым по Фреше в точке* x_0, если он дифференцируем по Фреше в окрестности этой точки (т. е. имеет производную Фреше в окрестности точки x_0) и при этом

$$\|g'(x) - g'(x_0)\| \to 0; \text{ при } \|x - x_0\| \to 0.$$

2. Пространства функций. Напомним, что абсолютно непрерывные функции характеризуются тем свойством, что они почти всюду (п.в.) имеют производную и всюду равны интегралу от своей производной:

$$x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^{t} \dot{x}(\tau) d\tau \qquad \forall\, t.$$

Их производная $\dot{x}$ является произвольной функцией из L_1, т. е. измеримой и суммируемой с первой степенью. Множество всех абсолютно непрерывных функций $x(t) : [t_0, t_1] \to \mathbb{R}^n$ обозначается $W_1^1([t_0, t_1], \mathbb{R}^n)$ (первая производная суммируема с первой степенью), или $AC([t_0, t_1], \mathbb{R}^n)$ (absolutely continuous functions). К этому классу в оптимальном управлении принято причислять фазовую переменную $x(t)$. Напомним, что

$$\|x\|_{AC} = \ |x(t_0)| + \|\dot{x}\|_1, \tag{1.15}$$

где $\|u\|_1 = \int_{t_0}^{t_1} |u(t)| dt$ есть норма в пространстве L_1. Пространство AC, снабженное нормой (1.15), является банаховым.

Что же касается управлений, то, как уже говорилось, мы будем считать, что управление $u(t) : [t_0, t_1] \to \mathbb{R}^m$ является произвольной функцией из класса $L_\infty([t_0, t_1], \mathbb{R}^m)$ ограниченных измеримых функций. Норма в этом пространстве определяется как

$$\|u\|_\infty = \ \operatorname*{vraimax}_{t \in [t_0, t_1]} |u(t)|. \tag{1.16}$$

Напомним, что такое $\operatorname{vrai\,max}$ (существенный максимум, или $\operatorname{ess\,sup}$) ограниченной измеримой функции $\varphi(t) : [t_0, t_1] \to \mathbb{R}^m$. Он определяется так:

$$\operatorname*{vraimax}_{[t_0, t_1]} \varphi(t) = \ \min \{\, C \ \mid \ \varphi(t) \le C \quad \text{п.в. на} \quad [t_0, t_1] \,\}.$$

(Докажите, что $\min$ здесь действительно достигается.)

Мы будем использовать также пространство $C([t_0, t_1], \mathbb{R}^n)$ непрерывных функций $x(t)$ на $[t_0, t_1]$ со значениями в $\mathbb{R}^n$. Как известно, норма в этом пространстве есть

$$\|x\|_C = \max_{t \in [t_0, t_1]} |x(t)|.$$

В обозначениях пространств функций их область значений $\mathbb{R}^n$ мы часто будем опускать.

3. Система уравнений в вариациях. Напомним следующий факт из теории обыкновенных дифференциальных уравнений.

Теорема 2. *Пусть на отрезке* $\Delta = [t_0, t_1]$ *рассматривается управляемая система*

$$\dot{x} = f(x,u), \qquad x(t_0) = x_0 \tag{1.17}$$

с непрерывно дифференцируемой функцией f *. Пусть* $\hat{x}(t)$ *есть решение этой системы для некоторой функции* $\hat{u} \in L_\infty(\Delta, \mathbb{R}^m)$ *и некоторого начального значения* $\hat{x}(t_0) = \hat{x}_0$ *. Тогда эта система имеет решение на* Δ *при любом* x_0 *, достаточно близком к* $\hat{x}_0$ *, и любой* $u(t)$ *, равномерно близкой к* $\hat{u}(t)$ *, то есть существует* $\varepsilon > 0$ *такое, что если*

$$|x_0 - \hat{x}_0| < \varepsilon, \qquad \|u - \hat{u}\|_\infty < \varepsilon,$$

то система (1.17) имеет на Δ *решение* $x(t)$ *.*

Более того, если $|x_0 - \hat{x}_0| \to 0, \quad \|u - \hat{u}\|_\infty \to 0$ *, то* $\|x - \hat{x}\|_C \to 0$ *.*

Таким образом, в пространстве $\mathbb{R}^n \times L_\infty(\Delta)$ в некоторой окрестности $\mathcal{U}(\hat{x}_0) \times \mathcal{V}(\hat{u})$ точки $(\hat{x}_0, \hat{u})$ определен оператор

$$F : (x_0, u) \in \mathcal{U}(\hat{x}_0) \times \mathcal{V}(\hat{u}) \mapsto x(\cdot) \in C(\Delta),$$

переводящий пару (x_0, u) в соответствующее ей решение $x(t)$ уравнения (1.17), и этот оператор непрерывен в в точке $(\hat{x}_0, \hat{u})$. (Отсюда, кстати, следует, что он будет непрерывен и в любой другой точке указанной окрестности.)

Покажем, что оператор F обладает более сильным свойством.

Теорема 3. *Оператор* F *дифференцируем по Фреше в точке* $(\hat{x}_0, \hat{u})$ *, и его производная Фреше есть линейный оператор*

$$F'(\hat{x}_0, \hat{u}) : \mathbb{R}^n \times L_\infty(\Delta) \mapsto C(\Delta),$$

отображающий пару $(\bar{x}_0, \bar{u})$ *в функцию* $\bar{x}(t)$ *, которая есть решение уравнения*

$$\dot{\bar{x}} = f_x(\hat{x}, \hat{u})\bar{x} + f_u(\hat{x}, \hat{u})\bar{u}, \qquad \bar{x}(t_0) = \bar{x}_0. \tag{1.18}$$

Доказательство. Пусть $x_0 \in \mathcal{U}(\hat{x}_0)$, $u \in \mathcal{V}(\hat{u})$ и x есть решение уравнения (1.17). Положим $\bar{x}_0 = x_0 - \hat{x}_0, \quad \bar{u} = u - \hat{u}, \quad \delta x = x - \hat{x},$ так что

$$x_0 = \hat{x}_0 + \bar{x}_0, \quad u = \hat{u} + \bar{u}, \quad x = \hat{x} + \delta x.$$

Тогда имеем

$$\frac{d}{dt}(\hat{x} + \delta x) = f(\hat{x} + \delta x, \hat{u} + \bar{u}), \qquad (\hat{x} + \delta x)\,|_{t_0} = \hat{x}_0 + \bar{x}_0,$$

$$\frac{d\hat{x}}{dt} = f(\hat{x}, \hat{u}), \qquad \hat{x}(t_0) = \hat{x}_0.$$

Вычитая из первого уравнения второе, и разлагая f до линейных членов, получаем

$$\delta\dot{x} = f_x(\hat{x}, \hat{u})\delta x + f_u(\hat{x}, \hat{u})\bar{u} + \xi(t, \delta x, \bar{u}), \quad \delta x(t_0) = \bar{x}_0, \tag{1.19}$$

где $\|\xi\|_C = o(\|\delta x\|_C + \|\bar{u}\|_\infty)$ при $\|\delta x\|_C \to 0$, $\|\bar{u}\|_\infty \to 0$.

Рассмотрим теперь функцию $\bar{x}(t)$, которая есть решение уравнения (1.18), и оценим разность $r(t) = \delta x(t) - \bar{x}(t)$. Из (1.19) и (1.18) имеем

$$\dot{r} = f_x(\hat{x}, \hat{u})r + \xi(t, \delta x, \bar{u}), \qquad r(t_0) = 0$$

Из оценок типа Гронуолла (см., например, [15, глава 9]) следует, что тогда

$$\|r\|_C \leq \text{const}\,\|\xi(t, \delta x, \bar{u})\|_1, \text{ и поэтому } \|r\|_C \leq o(\|\delta x\|_C + \|\bar{u}\|_\infty).$$

Но у нас $\delta x = r + \bar{x}$, поэтому $\|r\|_C \leq o(\|r\|_C) + o(\|\bar{x}\|_C + \|\bar{u}\|_\infty)$.

Из (1.18) и опять из оценок Гронуолла вытекает, что $\|\bar{x}\|_C \leq \text{const}(|\bar{x}_0| + \|\bar{u}\|_1)$,

поэтому $\|r\|_C(1 - o(1)) \leq o(|\bar{x}_0| + \|\bar{u}\|_\infty)$, и тогда $\|r\|_C \leq o(|\bar{x}_0| + \|\bar{u}\|_\infty)$,

а это означает, что $\bar{x}(t)$ есть главная линейная часть величины $\delta x(t)$ (то есть приращения фазовой переменной x), порожденной приращениями $\bar{x}_0$ и $\bar{u}$. □

Линейное уравнение (1.18) называют *уравнением в вариациях для нелинейного уравнения (1.17).*

Пусть отрезок $[\tau_0, \tau_1]$ разбит на r последовательных промежутков (интервалов, полуинтервалов или отрезков) $\sigma_1, \ldots, \sigma_r$. Обозначим через $\chi_k(\tau)$ характеристическую функцию множества σ_k, $k = 1, \ldots, r$.

В качестве исходного нелинейного уравнения мы будем рассматривать уравнение

$$\frac{dx}{d\tau} = f(x, \hat{u}(\tau)) \sum_{k=1}^{r} z_k \chi_k(\tau), \tag{1.20}$$

с начальным условием

$$x(\tau_0) = x_0, \tag{1.21}$$

где z_k — числа, $k = 1, \ldots, r$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$ – вектор, $\hat{u}(\tau)$ – фиксированная ограниченная измеримая функция. Положим, $z = (z_1, \ldots, z_r)$. Пусть f и f_x непрерывны по (x, u).

Если ввести функцию $v(\tau) = \sum z_k \chi_k(\tau)$, то систему (1.20),(1.21) можно записать в виде

$$\frac{dx}{d\tau} = v f(x, \hat{u}(\tau)), \quad x(\tau_0) = x_0, \tag{1.22}$$

Теорема 4. *Пусть при некоторых $(\hat{x}_0, \hat{z}) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r$ задача Коши (1.20),(1.21) имеет решение $\hat{x}(\tau)$, определенное на $[\tau_0, \tau_1]$. Тогда в некоторой окрестности $\mathcal{W}$ точки $(\hat{x}_0, \hat{z})$ система (1.20),(1.21) определяет непрерывно дифференцируемый по Фреше оператор*

$$\varphi : (x_0, z) \in \mathcal{W} \mapsto \quad x(\cdot) \in AC([\tau_0, \tau_1], \mathbb{R}^n), \tag{1.23}$$

причем производная Фреше этого оператора в точке $(\hat{x}_0, \hat{z})$ есть линейный оператор, отображающий пару $(\bar{x}_0, \bar{z}) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r$ в функцию $\bar{x}(\cdot) \in AC([\tau_0, \tau_1], \mathbb{R}^n)$, определяемую как решение задачи Коши

$$\frac{d\bar{x}}{d\tau} = f'_x(\hat{x}(\tau), \hat{u}(\tau))\bar{x} \sum_{k=1}^{r} \hat{z}_k \chi_k(\tau) + f(\hat{x}(\tau), \hat{u}(\tau)) \sum_{k=1}^{r} \bar{z}_k \chi_k(\tau), \tag{1.24}$$

$$\bar{x}(\tau_0) = \bar{x}_0. \tag{1.25}$$

Коротко задачу Коши (1.24), (1.25) запишем в виде

$$\frac{d\bar{x}}{d\tau} = \hat{v}\hat{f}_x\bar{x} + \bar{v}\hat{f}, \quad \bar{x}(\tau_0) = \bar{x}_0, \tag{1.26}$$

где $\hat{v} = \sum \hat{z}_k\chi_k(\tau)$, $\bar{v} = \sum \bar{z}_k\chi_k(\tau)$, $\hat{f}_x = f_x(\hat{x}, \hat{u})$, $\hat{f} = f(\hat{x}, \hat{u})$. Система уравнений (1.24) есть *система уравнений в вариациях для системы (1.20).*

Введем конечномерный оператор $x_1 = P(x_0, z)$ такой, что

$$P : (x_0, z) \in \mathcal{W} \longmapsto x_1 = x(\tau_1) \in \mathbb{R}^n, \tag{1.27}$$

где $x(\cdot) = \varphi(x_0, z)$ - решение задачи Коши (1.20),(1.21), а $\mathcal{W} \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r$ - окрестность точки $(\hat{\xi}, \hat{z})$, указанная в теореме 4. Пусть условия этой теоремы выполнены. Непосредственно из теоремы 4 вытекает следующая теорема.

Теорема 5. *Конечномерный оператор (1.27) определен и непрерывно дифференцируем в некоторой окрестности $\mathcal{W}$ точки $(\hat{x}_0, \hat{z})$. Его производная в этой точке есть конечномерный линейный оператор*

$$P' : (\bar{x}_0, \bar{z}) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r \longmapsto \bar{x}_1 = \bar{x}(\tau_1)) \in \mathbb{R}^n,$$

где $\bar{x}(\cdot)$ определяется как решение задачи Коши (1.24), (1.25).

1.4 Принцип максимума в задаче B .

1. Формулировка принципа максимума задачи B . Напомним постановку задачи B :

$$J = F_0(x_0, x_1) \to min, \quad F(x_0, x_1) \leqslant 0, \quad K(x_0, x_1) = 0, \tag{1.28}$$

$$\dot{x} = f(x, u), \quad u \in U, \tag{1.29}$$

где $x_0 = x(t_0)$, $x_1 = x(t_1)$, а t_0, t_1 - свободны. Здесь (1.28) — *концевой блок задачи*, (1.29) — *управляемая система* задачи.

Введем *концевую функцию Лагранжа*

$$l = l(x_0, x_1, \alpha_0, \alpha, \beta) = \alpha_0 F_0(x_0, x_1) + \alpha F(x_0, x_1) + \beta K(x_0, x_1),$$

где α_0 — число, α и β - векторы-строки тех же размерностей, что и F и K соответственно, т.е. $\alpha \in (\mathbb{R}^k)^*$, $\beta \in (\mathbb{R}^q)^*$.

Далее, введем *функцию Понтрягина*

$$H = H(x, u, \psi) = \psi f(x, u),$$

где $\psi \in (\mathbb{R}^n)^*$ — вектор строка.

Пусть $\Upsilon = (x(t), u(t) \mid t \in [t_0, t_1])$ - допустимая траектория задачи B . Будем говорить, что для нее выполнен *принцип максимума Понтрягина*, если существуют число α_0 , векторы $\alpha \in (\mathbb{R}^k)^*$, $\beta \in (\mathbb{R}^q)^*$ и абсолютно непрерывная функция $\psi(t) : [t_0, t_1] \to (\mathbb{R}^n)^*$, такие, что

(i) $\alpha_0 \geqslant 0, \alpha \geqslant 0$,

(ii) $\alpha_0 + |\alpha| + |\beta| > 0$,

(iii) $\alpha_i F_i(x(t_0), x(t_1)) = 0, \quad i = 1, \ldots, k,$

(iv) $-\dot{\psi}(t) = H'_x(t, x(t), u(t), \psi(t))$ п.в. на $[t_0, t_1]$,

(v) $\psi(t_0) = l'_{x_0}(x(t_0), x(t_1), \alpha_0, \alpha, \beta), \quad -\psi(t_1) = l'_{x_1}(x(t_0), x(t_1), \alpha_0, \alpha, \beta),$

(vi) $H(x(t), u, \psi(t)) \leq 0 \qquad \forall t \in [t_0, t_1] \ \ \forall u \in U$,

(vii) $H(x(t), u(t), \psi(t)) = 0$ п.в. на $[t_0, t_1]$.

Из условий (vi) и (vii) следует, что почти для всех $t \in [t_0, t_1]$ функция $u \mapsto H(x(t), u, \psi(t))$ достигает максимума по $u \in U$ в точке $u = u(t)$. Поэтому (vi)–(vii) называют *условием максимума.*

Функция

$$\mathcal{H}(x, \psi) = \max_{u \in U} H(x, u, \psi) \tag{1.30}$$

называется *функцией Гамильтона*, или *гамильтонианом.*

Из сказанного вытекает, что на оптимальной траектории H и $\mathcal{H}$ совпадают:

$$\mathcal{H}(x(t), \psi(t)) = H(x(t), u(t), \psi(t)) \qquad \text{п.в. на } [t_0, t_1].$$

Замечание 4.0. Обратим внимание, что функция Понтрягина $H(x, u, \psi)$ и функция Гамильтона $\mathcal{H}(x, \psi)$ — это две разные функции; они даже зависят от разного набора аргументов. Связаны эти функции соотношением (1.30), и совпадают они лишь вдоль "оптимальной" траектории. Из-за последнего равенства часто происходит путаница между этими функциями (особенно в иностранной литературе), которой следует избегать.

Используют также следующие названия: (i) — условие *неотрицательности*, (ii) — условие *нетривиальности*, (iii) — условие *дополняющей нежесткости*, (iv) — *сопряженная система* (для ψ), (v) — условия *трансверсальности* (для ψ).

Переменную ψ называют *двойственой* или *сопряженной* переменной, или *множителем Лагранжа для управляемой системы*, а α_0, α, β — *множителями Лагранжа концевого блока задачи.* Набор $\lambda = (\alpha_0, \alpha, \beta, \psi(\cdot))$ называют *набором множителей Лагранжа* задачи B.

Теорема 6. *Пусть $\Upsilon = (x(t), u(t) \mid t \in [t_0, t_1])$ — оптимальная траектория в задаче B. Тогда для нее выполнен принцип максимума Понтрягина.*

Мы переходим непосредственно к доказательству этой теоремы.

2. Индекс θ . Пусть $\hat{\Upsilon} = (\hat{x}(t), \hat{u}(t) \mid t \in [\hat{t}_0, \hat{t}_1])$ — решение задачи B. С этим решением мы свяжем семейство конечномерных задач B^θ и их оптимальных решений (x_0^θ, z^θ), занумерованных некоторым индексом θ .

Под индексом будем понимать набор значений времени и управления

$$\theta = \{(t^1, u^1), \ldots, (t^s, u^s)\}$$

такой, что $\hat{t}_0 \leqslant t^1 \leqslant \ldots \leqslant t^s \leqslant \hat{t}_1, \qquad u^k \in U, \qquad k = 1, \ldots, s.$ Длина индекса $s = s(\theta)$ зависит от θ .

Определим отрезок $[\tau_0, \tau_1]$ следующим образом: берем отрезок $[\hat{t}_0, \hat{t}_1]$, и в точках $t^1, \ldots, t^s$ вставляем отрезки единичной длины, сохраняя всякий раз положение точки $\hat{t}_0$.

В результате получаем отрезок $[\tau_0, \tau_1]$ с концами $\tau_0 = \hat{t}_0, \quad \tau_1 = \hat{t}_1 + s$, а вставленные отрезки будут иметь вид

$$\Delta^1 = [t^1, t^1 + 1], \quad \Delta^2 = [t^2 + 1, t^2 + 2], \ \ldots, \quad \Delta^s = [t^s + (s-1), t^s + s].$$

Положим

$$\mathcal{M}_0 = \bigcup_1^s \Delta^k, \ \ \mathcal{M}_+ = [\tau_0, \tau_1] \backslash \mathcal{M}_0.$$

Пусть

$$v^\theta(\tau) = \begin{cases} 0, & \tau \in \mathcal{M}_0, \\ 1, & \tau \in \mathcal{M}_+, \end{cases} \qquad t^\theta(\tau) = \hat{t}_0 + \int_{\tau_0}^{\tau} v^\theta(s) ds, \quad \tau \in [\tau_0, \tau_1].$$

Тогда

$$\frac{dt^\theta(\tau)}{d\tau} = v^\theta(\tau), \quad t^\theta(\tau_0) = \hat{t}_0, \quad t^\theta(\tau_1) = \hat{t}_1.$$

Таким образом, $t^\theta(\tau)$ — кусочно-линейная неубывающая функция, отображающая $[\tau_0, \tau_1]$ на $[\hat{t}_0, \hat{t}_1]$, причем Δ^k — ее отрезки постоянства и $t^\theta(\Delta^k) = t^k, \quad k = 1, \ldots, s$. Положим

$$u^\theta(\tau) = \begin{cases} \hat{u}(t^\theta(\tau)), & \tau \in \mathcal{M}_+, \\ u^k, \quad \tau \in \Delta^k, & k = 1, \ldots, s; \end{cases} \qquad x^\theta(\tau) = \hat{x}(t^\theta(\tau)).$$

Тогда $u^\theta(\tau) : [\tau_0, \tau_1] \to \mathbb{R}^m$ — ограниченая измеримая функция удовлетворяющая условию $u^\theta(\tau) \in U$ п.в. на $[\tau_0, \tau_1]$ (почему?), а $x^\theta(\tau) : [\tau_0, \tau_1] \to \mathbb{R}^n$ — абсолютно непрерывная функция.

Предложение 3. *(a) Имеют место равенства*

$$x^\theta(\tau_0) = \hat{x}(\hat{t}_0), \quad x^\theta(\tau_1) = \hat{x}(\hat{t}_1); \tag{1.31}$$

(b) п.в. на $[\tau_0, \tau_1]$ *имеет место равенство*

$$\frac{dx^\theta(\tau)}{d\tau} = v^\theta(\tau) f(x^\theta(\tau), u^\theta(\tau)). \tag{1.32}$$

Доказательство. (a) — вытекает из условий $t^\theta(\tau_0) = \hat{t}_0, \ t^\theta(\tau_1) = \hat{t}_1$.

(b) Пусть Δ^k - один из отрезков множества $\mathcal{M}_0$. Тогда из условия $t^\theta(\tau) = const$ на Δ^k следует, что $\frac{dx^\theta(\tau)}{d\tau} = 0$ на Δ^k. Одновременно $v^\theta(\tau) = 0$ на Δ^k . Следовательно (1.32) имеет место на Δ^k , а, значит , п.в. на $\mathcal{M}_0$.

Пусть теперь Δ_+ - интервал множества $\mathcal{M}_+$. Согласно формуле замены переменной на Δ_+ имеем:

$$\frac{dx^\theta(\tau)}{d\tau} = \frac{d\hat{x}(t^\theta(\tau))}{dt} \cdot \frac{dt^\theta(\tau)}{d\tau} =$$

$$= f(\hat{x}(t^\theta(\tau)), \hat{u}(t^\theta(\tau))) v^\theta(\tau) = f(x^\theta(\tau), u^\theta(\tau)) v^\theta(\tau)$$

Следовательно (1.32) имеет место на на Δ_+ , а тогда и п.в. на $\mathcal{M}_+$. Но $\mathcal{M}_0 \cup \mathcal{M}_+ = [\tau_0, \tau_1]$. Значит, (1.32) имеет место п.в. на $[\tau_0, \tau_1]$.

Множество $\mathcal{M}_0$ состоит из конечного числа отрезков Δ^k , $k = 1, \ldots, s$. Множество $\mathcal{M}_+$ — из конечного числа интервалов или полуинтервалов. Все указанные отрезки, интервалы и полуинтервалы множеств $\mathcal{M}_0$ и $\mathcal{M}_+$ обьединим в набор, упорядочим и обозначим составляющие этого набора через σ_k, $k = 1, \ldots, r$. Итак, $[\tau_0, \tau_1] = \bigcup_1^r \sigma_k$, причем различные σ_k не пересекаются. Обозначим через $\chi_k(\tau)$ характеристическую функцию множества σ_k, $k = 1, \ldots, r$.

Пусть $\hat{z}_k$ — значение $v^\theta(\tau)$ на σ_k, $k = 1, \ldots, r$, т.е.

$$v^\theta(\tau) = \sum_{k=1}^{r} \hat{z}_k \chi_k(\tau) \quad \text{п.в..}$$

Положим $\hat{z} = (\hat{z}_1, \ldots, \hat{z}_r)$, $\hat{x}_0 = \hat{x}(\hat{t}_0)$. Напомним, что $\hat{z}_k = 0$, если $\sigma_k \subset \mathcal{M}_0$, и $\hat{z}_k = 1$, если $\sigma_k \subset \mathcal{M}_+$.

3. Задача B^θ индекса θ и ее оптимальное решение. Итак, для оптимальной траектории $\hat{\Upsilon} = (\hat{x}(t), \hat{u}(t) \mid t \in [\hat{t}_0, \hat{t}_1])$ задачи B и индекса $\theta = \{(t^1, u^1), \ldots, (t^s, u^s)\}$ мы определили отрезок $[\tau_0, \tau_1]$ и функции $v^\theta, t^\theta, u^\theta, x^\theta$ на этом отрезке. Вместе они определяют траекторию

$$\Upsilon^\theta = (t^\theta(\tau), x^\theta(\tau), u^\theta(\tau), v^\theta(\tau) \mid \tau \in [\tau_0, \tau_1]) \tag{1.33}$$

в задаче $\tilde{B}$, которая имеет вид:

$$F_0(p) \to min, \qquad F(p) \leqslant 0 \quad , K(p) = 0,$$

$$\frac{dx}{d\tau} = v f(x, u), \quad \frac{dt}{d\tau} = v, \quad u \in U, \quad v \geqslant 0,$$

где $p = (x_0, x_1) = (x(\tau_0), x(\tau_1))$, функции $t(\tau), x(\tau)$ — абсолютно непрерывны, $u(\tau)$ — ограничена и измерима, а $v(\tau)$ — *кусочно постоянна*, τ_0 и τ_1 — фиксированы.

Теорема 7. *Для любого индекса θ траектория Υ^θ оптимальна в задаче $\tilde{B}$*

Доказательство. Согласно предложению 3, пункт (b),

$$\frac{dx^\theta}{d\tau} = v^\theta f(x^\theta, u^\theta) \qquad \text{п.в..}$$

Кроме того,

$$\frac{dt^\theta}{d\tau} = v^\theta, \qquad v^\theta \geqslant 0, \qquad u^\theta \in U \qquad \text{п.в..}$$

— согласно определениям функций v^θ , t^θ , u^θ. Наконец, в силу пункта (a) предложения 3 $x^\theta(\tau_0) = \hat{x}(t_0)$, $x^\theta(\tau_1) = \hat{x}(\hat{t}_1)$. Отсюда и из оптимальности траектории $\hat{\Upsilon}$ в задаче B вытекает, согласно теореме 1 (о связи задач B и $\tilde{B}$) оптимальность траектории Υ^θ в задаче $\tilde{B}$. □

Для индекса θ мы определили разбиение отрезка $[\tau_0, \tau_1]$ на промежутки $\sigma_1, \ldots, \sigma_r$ (это отрезки Δ^k множества M_0 и смежные с ними интервалы или полуинтервалы, принадлежащие M_+). Рассмотрим оператор

$$P^\theta : (x_0, z) \mapsto x(\tau_1),$$

где $x(\tau) : [\tau_0, \tau_1] \to \mathbb{R}^n$ определяется как решение задачи Коши

$$\frac{dx}{d\tau} = f(x, u^\theta(\tau)) \sum z_k \chi_k(\tau), \qquad x(\tau_0) = x_0 \tag{1.34}$$

(здесь χ_k — характеристическая функция множества σ_k). Это решение будем обозначать также $x(\cdot) = \varphi^\theta(x_0, z)$.

Поскольку

$$v^\theta(\tau) := \sum \hat{z}_k \chi_k(\tau), \quad \frac{dx^\theta}{d\tau} = v^\theta f(x^\theta, u^\theta), \quad \hat{x}_0 := \hat{x}(\hat{t}_0) = x^\theta(\tau_0),$$

то при $x = \hat{x}_0, z = \hat{z}$ задача Коши (1.34) имеет решение $x^\theta(\tau)$, определенное на $[\tau_0, \tau_1]$, а тогда по теореме 5 оператор P^θ определен в некоторой окрестности $\mathcal{W}$ точки $(\hat{x}_0, \hat{z})$ в пространстве $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r$.

Теперь мы можем поставить конечномерную задачу B^θ . Она рассматривается в пространстве переменных $(x_0, z) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r$.

Задача B^θ .

$$F_0(x_0, P^\theta(x_0, z)) \to min, \qquad F(x_0, P^\theta(x_0, z)) \leqslant 0\,, \qquad K(x_0, P^\theta(x_0, z)) = 0\,,$$

$$-z \leqslant 0, \qquad (x_0, z) \in \mathcal{W}.$$

Положим $\hat{x}_0 = \hat{x}(\hat{t}_0)$, $\hat{x}_1 = \hat{x}(\hat{t}_1)$, $\hat{p} = (\hat{x}_0, \hat{x}_1)$. Напомним, что вектор $\hat{z}$ определяется индексом θ , т.е. $\hat{z} = \hat{z}(\theta)$.

Теорема 8. *Для любого индекса θ точка $(\hat{x}_0, \hat{z})$ есть решение задачи B^θ .*

Доказательство. Предположим противное: пусть для некоторого индекса θ в задаче B^θ имеется допустимая точка (x_0, z) такая, что

$$F_0(p) < F_0(\hat{p}), \tag{1.35}$$

где $p = (x_0, P^\theta(x_0, z))$. Пусть $x(\cdot) = \varphi^\theta(x_0, z)$, $v(\cdot) = \sum z_k \chi_k(\cdot)$, а $t(\cdot)$ найдена из условий

$$\frac{dt}{d\tau} = v, \quad t(\tau_0) = t_0,$$

где t_0 выбрано произвольно. Тогда из определений следует, что

$$\tilde{\Upsilon} = (t(\tau), x(\tau), u^\theta(\tau), v(\tau) \mid \tau \in [\tau_0, \tau_1])$$

— допустимая траектория задачи $\tilde{B}$ такая, что $(x(\tau_0), x(\tau_1)) = p$. Согласно теореме 7 траектория Υ^θ (1.33) оптимальна в задаче $\tilde{B}$. Однако в силу (1.35) траектория $\tilde{\Upsilon}$ доставляет меньшее значение целевой функции F_0 , чем траектория Υ^θ . Противоречие доказывает теорему. □

Задача B^θ представляет собой конечномерную гладкую задачу с ограничениями типа равенства и неравенства. Напомним необходимые условия экстремума в общей задаче такого типа.

4. Условия минимума в гладкой конечномерной задаче с ограничениями равенства и неравенства. Здесь мы ограничимся лишь формулировкой необходимых условий в этой задаче – правила множителей Лагранжа. В главе 2 мы дадим формулировку и доказательство правила множителей Лагранжа в более общей ситуации – для бесконечномерного случая.

Пусть $X = \mathbb{R}^n$, $\mathcal{U} \subset X$ - открытое множество, на котором заданы функции $f_i : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$, $i = 0, \dots, k$, и векторная функция $g : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^m$. Предположим, что все f_i и g непрерывно диференцируемы на $\mathcal{U}$. Рассмотрим задачу:

$$f_0(x) \to min, \quad f_i(x) \leqslant 0, \quad i = 1, \dots, k, \quad g(x) = 0, \quad x \in \mathcal{U}. \tag{1.36}$$

Пусть $\alpha = (\alpha_0, \dots, \alpha_k) \in (\mathbb{R}^{k+1})^*$, $\beta \in (\mathbb{R}^m)^*$. Введем функцию Лагранжа задачи (1.36) :

$$L(x_0, \alpha, \beta) = \sum_{i=0}^{k} \alpha_i f_i(x) + \beta g(x).$$

Назовем α_0, ... , α_k, β *множителями Лагранжа*, а через $\lambda = (\alpha_0, \dots, \alpha_k, \beta) = (\alpha, \beta)$ будем обозначать произвольный набор множителей Лагранжа. Таким образом, $L = L(x, \lambda)$.

Теорема 9 (правило множителей Лагранжа). *Пусть x_0 — точка локального минимума в задаче (1.36). Тогда существуют набор $\lambda = (\alpha_0, \dots, \alpha_k, \beta)$ такой, что выполнены следующие условия*

$$\alpha_0 \geqslant 0, \ \alpha_1 \geqslant 0, \dots, \alpha_k \geqslant 0, \tag{1.37}$$

$$\sum_{0}^{k} \alpha_i + |\beta| > 0, \tag{1.38}$$

$$\alpha_i f_i(x_0) = 0, \quad i = 1, \dots, k, \tag{1.39}$$

$$L'_x(x_0, \lambda) = 0. \tag{1.40}$$

Говорят, что (1.37) — условие *неотрицательности*, (1.38) — условие *нетривиальности*, (1.39) — условие *дополняющей нежесткости*, (1.40) — условие *стационарности функции Лагранжа по* x . Вместе эти условия и составляют *правило множителей Лагранжа.* Точки x_0 (не обязательно доставляющие локальный минимум), в которых выполнено правило множителей Лагранжа, называются *стационарными.*

5. Условия стационарности в задаче B^θ . Фиксируем индекс θ . Согласно теореме 8, $(\hat{x}_0, \hat{z})$ — точка минимума в задаче B^θ . Следовательно, для нее выполнено правило множителей Лагранжа. Выпишем его.

Функция Лагранжа задачи B^θ имеет вид

$$L = \alpha_0 F_0 + \alpha F + \beta K - \mu z,$$

где α_0 — число, $\alpha \in (\mathbb{R}^k)^*$, $\mu \in (\mathbb{R}^r)^*$, $\nu \in (\mathbb{R}^n)^*$ — вектор-строки. Пусть

$$l(x_0, x_1) = \alpha_0 F_0(x_0, x_1) + \alpha F(x_0, x_1) + \beta K(x_0, x_1)$$

Тогда

$$L(x_0, z) = l(x_0, P^\theta(x_0, z)) - \mu z.$$

Здесь и далее зависимость l и L от множителей Лагранжа α_0, α, β и μ мы опускаем.

Производные функции Лагранжа по переменым x_0, z в точке $(\hat{x}_0, \hat{z})$ имеют вид

$$\hat{L}_{x_0} = \hat{l}_{x_0} + \hat{l}_{x_1}\hat{P}^\theta_{x_0}, \qquad \hat{L}_z = \hat{l}_{x_1}\hat{P}^\theta_z - \mu\,.$$

(здесь и далее "крышки"означают, что производные вычисляются в указанной точке или для соответствующих ее проекций). Следовательно, условия стационарности в точке $(\hat{x}_0, \hat{z})$ имеют вид:

$$\alpha_0 \geqslant 0,\ \alpha \geqslant 0,\ \mu \geqslant 0, \tag{1.41}$$

$$\alpha_0 + |\alpha| + |\beta| + |\mu| > 0, \tag{1.42}$$

$$\alpha F(\hat{p}) = 0, \quad \mu\hat{z} = 0, \tag{1.43}$$

$$\hat{l}_{x_0} + \hat{l}_{x_1}\hat{P}^\theta_{x_0} = 0, \tag{1.44}$$

$$\hat{l}_{x_1}\hat{P}^\theta_z - \mu = 0. \tag{1.45}$$

Если $\alpha_0 + |\alpha| + |\beta| = 0$, то $l_p(\hat{p}) = 0$, а тогда в силу (1.45) $\mu = 0$. Следовательно, условие нетривиальности (1.42) эквивалентно условию $\alpha_0 + |\alpha| + |\beta| > 0$. Не ограничивая общности, можно считать, что $\alpha_0 + |\alpha| + |\beta| = 1$. Окончательно получаем следующую систему условий стационарности:

$$\begin{cases} \alpha_0 \geqslant 0,\ \alpha \geqslant 0,\ \ \mu \geqslant 0, \quad \alpha_0 + |\alpha| + |\beta| = 1, \quad \alpha F(\hat{p}) = 0,\ \ \mu\hat{z} = 0, \\ \hat{l}_{x_0} + \hat{l}_{x_1}\hat{P}^\theta_{x_0} = 0, \quad \hat{l}_{x_1}\hat{P}^\theta_z - \mu = 0. \end{cases} \tag{1.46}$$

Последние два условия вместе означают, что функция Лагранжа $L(x_0, z)$ стационарна в точке $(\hat{x}_0, \hat{z})$, то есть

$$L'(\hat{x}_0, \hat{z})(\bar{x}_0, \bar{z}) = \hat{l}_{x_0}\bar{x}_0 + \hat{l}_{x_1}(P^\theta)'(\hat{x}_0, \hat{z})(\bar{x}_0, \bar{z}) - \mu\bar{z} = 0 \tag{1.47}$$

тождественно по $\bar{x}_0, \bar{z}$. Это, в свою очередь, означает, что $dL(\hat{x}_0, \hat{z}) = 0$.

Напомним, что согласно теореме 5 производная оператора P^θ в точке $(\hat{x}_0, \hat{z})$ есть линейный оператор

$$(\hat{P}^\theta)' : (\bar{x}_0, \bar{z}) \mapsto \bar{x}(\tau_1),$$

где $\bar{x}(\cdot)$ есть решение задачи Коши для уравнения в вариациях

$$\frac{d\bar{x}}{d\tau} = v^\theta f^\theta_x \bar{x} + \sum \bar{z}_k \chi_k f^\theta, \quad \bar{x}(\tau_0) = \bar{x}_0. \tag{1.48}$$

Мы обозначили здесь

$$f^\theta_x(\tau) = f_x(x^\theta(\tau), u^\theta(\tau)), \quad f^\theta(\tau) = f(x^\theta(\tau), u^\theta(\tau)). \tag{1.49}$$

Следовательно, частная производная $\hat{P}^\theta_{x_0}$ есть отображение $\bar{x}_0 \mapsto \bar{x}(\tau_1)$, где $\bar{x}(\cdot)$ определяется как решение задачи Коши

$$\frac{d\bar{x}}{d\tau} = v^\theta f^\theta_x \bar{x}, \quad \bar{x}(\tau_0) = \bar{x}_0 \tag{1.50}$$

(в условиях (1.48) мы положили $\bar z = 0$). Аналогично частная производная $\hat P_z^\theta$ есть отображение $\bar z \mapsto \bar x(\tau_1)$, где $\bar x(\cdot)$ есть решение задачи Коши

$$\frac{d\bar x}{d\tau} = v^\theta f_x^\theta \bar x + \sum \bar z_k \chi_k f^\theta, \quad \bar x(\tau_0) = 0 \tag{1.51}$$

(в условиях (1.48) мы положили $\bar x_0 = 0$).

6. Сопряженное уравнение и условия трансверсальности. В условии (1.47) фигурирует величина $\hat l_{x_1} P'(\hat x_0, \hat z)(\bar x_0, \bar z) = \hat l_{x_1} \bar x_1$. Найдем ее явное выражение через приращения независимых переменных $\bar x_0$, $\bar z$. Это удобно сделать в следующей общей ситуации.

Пусть на отрезке $\Delta = [t_0, t_1]$ задано уравнение

$$\dot{\bar x} = A(t)\bar x + \bar v(t), \tag{1.52}$$

где $A(t)$ – матрица с ограниченными измеримыми коэффициентами. Решение этого уравнения $\bar x(t)$ зависит от начального значения $\bar x_0 \in \mathbb{R}^n$ и от функции $\bar v(t) \in L_\infty$, которые, отметим, задаются независимо друг от друга.

Пусть также задан произвольный вектор $l_1 \in \mathbb{R}^n$, и нас интересует представление величины $l_1 \bar x_1$ (где $\bar x_1 = \bar x(t_1)$) через независимые переменные $\bar x_0$, $\bar u$.

Определим абсолютно непрерывную функцию $\psi(t)$ как решение следующего уравнения (которое называется *сопряженным уравнением*)

$$\dot\psi = -\psi A \tag{1.53}$$

с начальным значением $\psi(t_1) = l_1$. Ниже для краткости мы полагаем $\psi(t_0) = \psi_0$, $\psi(t_1) = \psi_1$.

Лемма 2. *Для любого решения уравнения (1.52) с начальным значением* $\psi(t_1) = l_1$ *справедливо равенство*

$$l_1 \bar x_1 = -\psi_0 \bar x_0 - \int_{t_0}^{t_1} \psi \bar v \, dt. \tag{1.54}$$

Доказательство. При выполнении (1.52) и (1.53) очевидно имеем

$$\frac{d}{dt}(\psi \bar x) \; = \; -\psi A \bar x + \psi(A\bar x + \bar v) = \psi \bar v,$$

поэтому

$$\psi_1 \bar x_1 - \psi_0 \bar x_0 = \int_{t_0}^{t_1} \psi \bar v \; dt,$$

откуда с учетом концевого условия $\psi_1 = -l_1$ получаем требуемое равенство. □

Применим полученную формулу к нашей ситуации. У нас

$$A = v^\theta(\tau) f_x^\theta(\tau); \qquad \bar v = \sum \bar z_k \chi_k f^\theta(\tau), \qquad l_1 = \hat l_{x_1}.$$

Пусть ψ^θ есть решение уравнения

$$-\frac{d\psi^\theta}{d\tau} = v^\theta \psi^\theta f_x^\theta \tag{1.55}$$

с начальным условием

$$\psi^\theta(\tau_1) = -\hat{l}_{x_1}. \tag{1.56}$$

Из леммы 2 следует, что условие стационарности

$$\hat{l}_{x_0}\bar{x}_0 + \hat{l}_{x_1} dP^\theta(\hat{x}_0, \hat{z}) - \mu\bar{z} = 0$$

переписывается в виде

$$\hat{l}_{x_0}\bar{x}_0 - \psi^\theta(\tau_0)\bar{x}_0 - \sum_k \bar{z}_k \int\limits_{\sigma_k} \psi^\theta f^\theta\, d\tau = \sum_k \mu_k \bar{z}_k. \tag{1.57}$$

Это равенство выполнено для всех $\bar{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ и для всех $\bar{z}_k$ $k = 1, \dots, s$. При этом, как мы помним, $\mu_k \geq 0$, если k таково, что $\sigma_k \subset \mathcal{M}_0$, и $\mu_k = 0$, если $\sigma_k \subset \mathcal{M}_+$. Полагая в (1.57) все $\bar{z}_k = 0$, получаем

$$\hat{l}_{x_0} = \psi^\theta(\tau_0).$$

Это равенство вместе с равенством (1.56) называются *условиями трансверсальности.*

Теперь положим $\bar{x}_0 = 0$ в (1.57). Тогда для $\sigma_k \subset \mathcal{M}_+$ имеем

$$\int\limits_{\sigma_k} \psi^\theta f^\theta d\tau = 0,$$

а для $\sigma_k \subset \mathcal{M}_0$ имеем

$$\int_{\sigma_k} \psi^\theta f^\theta d\tau \leqslant 0.$$

Итог сказанному подводит следующая

Теорема 10. *Для любого индекса θ существует набор $\lambda^\theta = (\alpha_0, \alpha, \beta, \psi^\theta)$ такой, что выполнены условия*

$$\begin{cases} \alpha_0 \geqslant 0,\ \alpha \geqslant 0,\ \alpha F(\hat{p}) = 0, \qquad \alpha_0 + \sum \alpha_i + |\beta| = 1, \\ -\frac{d\psi^\theta}{d\tau} = v^\theta \psi^\theta f_x^\theta, \quad \psi^\theta(\tau_0) = \hat{l}_{x_0}, \quad \psi^\theta(\tau_1) = -\hat{l}_{x_1}, \\ \int_{\sigma_k} \psi^\theta f^\theta d\tau = 0, \quad \sigma_k \subset \mathcal{M}_+, \\ \int_{\sigma_k} \psi^\theta f^\theta d\tau \leqslant 0, \quad \sigma_k \subset \mathcal{M}_0, \quad k = 1, \dots, r. \end{cases} \tag{1.58}$$

Здесь $\psi^\theta(\tau) : [\tau_0, \tau_1] \to \mathbb{R}^n$ – липшицева функция.

7. Представление условий стационарности в задаче B^θ с помощью функции $\psi(t)$. Принцип максимума индекса θ. Пусть θ — фиксированный индекс. Ему соответствует отрезок $[\tau_0, \tau_1]$, отрезки $\Delta^k \subset [\tau_0, \tau_1]$, $k = 1, \dots, s$, множества $\mathcal{M}_0 = \bigcup\limits_{k=1}^{s} \Delta^k$, $\mathcal{M}_+ = [\tau_0, \tau_1] \backslash \mathcal{M}_0$. Вместе отрезки Δ^k множества $\mathcal{M}_0$ и интервалы (полуинтервалы) множества $\mathcal{M}_+$ образуют набор $\sigma_1, \dots, \sigma_r$.

Функция $v^\theta(\tau)$ равна нулю на $\mathcal{M}_0$ и единице на $\mathcal{M}_+$. Мы пользуемся представлением

$$v^\theta(\tau) = \sum \hat{z}_k \chi_k(\tau),$$

где χ_k — характеристическая функция отрезка σ_k , а величины $\hat{z}_k$ принимают значения 0 или 1. Если $\sigma_k \subset \mathcal{M}_0$, то $\hat{z}_k = 0$; если $\sigma_k \subset \mathcal{M}_+$, то $\hat{z}_k = 1$. Наконец, $t^\theta(\tau)$ такова, что

$$\frac{dt^\theta}{d\tau} = v^\theta, \qquad t^\theta(\tau_0) = \hat{t}_0, \quad t^\theta(\tau_1) = \hat{t}_1.$$

Обозначим через $\tau^\theta(t) : [\hat{t}_0, \hat{t}_1] \to [\tau_0, \tau_1]$ правую обратную функцию к функции $t^\theta(\tau)$, непрерывную слева. Тогда

$$t^\theta(\tau^\theta(t)) = t \qquad \forall t \in \hat{\Delta} = [\hat{t}_0, \hat{t}_1]. \tag{1.59}$$

Пусть $\lambda^\theta = (\alpha_0, \alpha, \beta, \psi^\theta)$ — набор, удовлетворяющий условиям (1.58) теоремы 10. Положим

$$\psi(t) = \psi^\theta(\tau^\theta(t)) \qquad \forall t \in \hat{\Delta}. \tag{1.60}$$

Согласно предложению 2, из уравнения

$$-\frac{d\psi^\theta}{d\tau} = v^\theta \psi^\theta f_x^\theta, \quad \text{где} \quad f_x^\theta = f_x(x^\theta, u^\theta)$$

вытекает, что

$$-\frac{d\psi(t)}{dt} = \psi(t) f_x(x^\theta(\tau^\theta(t)), u^\theta(\tau^\theta(t))).$$

Пусть $\mathcal{N}_+ = [\hat{t}_0, \hat{t}_1] \backslash \{t^1, \dots, t^s\}$. Поскольку $u^\theta(\tau) = \hat{u}(t^\theta(\tau))$ на $\mathcal{M}_+$ и $\tau^\theta(t)$ переводит $\mathcal{N}_+$ в $\mathcal{M}_+$, то на $\mathcal{N}_+$ имеем:

$$u^\theta(\tau^\theta(t)) \overset{def}{=} \hat{u}(t^\theta(\tau^\theta(t))) \overset{(1.59)}{=} \hat{u}(t).$$

Следовательно, п.в. на $[\hat{t}_0, \hat{t}_1]$ имеем $u^\theta(\tau^\theta(t)) = \hat{u}(t)$. Далее,

$$x^\theta(\tau^\theta(t)) \overset{def}{=} \hat{x}(t^\theta(\tau^\theta(t))) \overset{(1.59)}{=} \hat{x}(t) \qquad \forall t \in [\hat{t}_0, \hat{t}_1].$$

Следовательно,

$$-\frac{d\psi}{dt} = \psi \hat{f}_x(t) \quad \text{п.в. на} \ [\hat{t}_0, \hat{t}_1], \quad \text{где} \ \hat{f}_x = f_x(\hat{x}, \hat{u}).$$

При этом в силу того же предложения 2:

$$\psi(\hat{t}_0) = \psi^\theta(\tau_0), \ \ \psi(\hat{t}_1) = \psi^\theta(\tau_1).$$

Следовательно,

$$\psi(\hat{t}_0) = \hat{l}_{x_0}, \quad -\psi(\hat{t}_1) = \hat{l}_{x_1},$$

где

$$\hat{l}_{x_0} = l_{x_0}(\hat{p}), \qquad \hat{l}_{x_1} = l_{x_1}(\hat{p}),$$

$$\hat{p} = (\hat{x}_0, \hat{x}_1), \quad \hat{x}_0 = \hat{x}(\hat{t}_0), \quad \hat{x}_0 = \hat{x}(\hat{t}_0).$$

Проанализируем теперь условие

$$\int\limits_{\sigma_k} \psi^\theta(\tau) f(x^\theta(\tau), u^\theta(\tau))\, d\tau = 0, \tag{1.61}$$

выполненное для любого $\sigma_k \subset \mathcal{M}_+$. Пусть $\sigma_k \subset \mathcal{M}_+$. Тогда $t^\theta(\sigma_k)$ – один из интервалов (полуинтервалов), составляющих множество $\mathcal{N}_+$. Обозначим его через Δ_+ . В интеграле (1.61) сделаем замену переменной $\tau = \tau^\theta(t)$. Поскольку

$$\frac{d\tau^\theta(t)}{dt} = 1 \text{ на } \mathcal{N}_+, \quad \psi^\theta(\tau^\theta(t)) \overset{def}{=} \psi(t) \text{ на } \hat{\Delta},$$

$$x^\theta(\tau^\theta(t)) = x(t) \text{ на } \hat{\Delta}, \quad u^\theta(\tau^\theta(t)) = u(t) \text{ на } \mathcal{N}_+,$$

и следовательно, те же равенства верны на $t^\theta(\sigma_k)$, то из (1.61) получаем:

$$\int\limits_{\Delta_+} \psi(t) f(\hat{x}(t), \hat{u}(t)) dt = 0.$$

Это условие выполнено для любого $\Delta_+ \subset \mathcal{N}_+$.

Проанализируем также условие

$$\int\limits_{\Delta_k} \psi^\theta(\tau) f(x^\theta(\tau), u^\theta(\tau)) d\tau \leqslant 0, \tag{1.62}$$

для любого $\Delta_k \subset \mathcal{M}_0$. Напомним, что $\Delta_k = [\tau_0^k, \tau_1^k], \quad \tau^\theta(t^k) = \tau_0^k$.
Поскольку $t^\theta(\tau) = t^k$ на Δ^k, то

$$x^\theta(\tau) \overset{def}{=} \hat{x}(t^\theta(\tau)) = \hat{x}(t^k) \text{ на } \Delta_k.$$

Далее, из условий

$$-\frac{d\psi^\theta}{d\tau} = v^\theta \psi^\theta f_x^\theta = 0 \quad \text{на } \Delta_k$$

вытекает, что на Δ_k

$$\psi^\theta(\tau) = \psi^\theta(\tau_0^k) = \psi^\theta(\tau^\theta(t^k)) \overset{def}{=} \psi(t^k).$$

Наконец, по определению функции u^θ имеем $u^\theta(\tau) \equiv u^k$ на Δ^k. Следовательно, из условия (1.62) получаем $\psi(t^k) f(\hat{x}(t^k), u^k) \leqslant 0, \quad k = 1, \ldots, s$.

Таким образом, из теоремы 10 вытекает:

Теорема 11 (принцип максимума индекса θ). *Для любого индекса θ существует набор $\lambda = (\alpha_0, \alpha, \beta, \psi)$ такой, что*

(a) $\alpha_0 \geqslant 0, \quad \alpha \geqslant 0; \quad \alpha_0 + |\alpha| + |\beta| = 1;$

(b) $\alpha F(\hat{p}) = 0;$

(c) $-\dot{\psi} = \psi \hat{f}_x;$

(d) $\psi(\hat{t}_0) = \hat{l}_{x_0}; \quad -\psi(\hat{t}_1) = \hat{l}_{x_1};$

(e) $\psi(t^k) f(\hat{x}(t^k), u^k) \leqslant 0, \quad k = 1, \ldots, s;$

(f) для любого интервала или полуинтервала Δ_+ , из которых состоит $\mathcal{N}_+$, выполнено условие

$$\int\limits_{\Delta_+} \psi \hat{f} dt = 0.$$

Здесь значения всех функций берутся, как всегда, на траектории $(\hat{x}, \hat{u})$.

Множество наборов λ , удовлетворяющих условиям (a)–(f), обозначим M^θ .

Предложение 4. M^θ *— конечномерный компакт, причем проектор*

$$\lambda = (\alpha_0, \alpha, \beta, \psi) \mapsto (\alpha_0, \alpha, \beta) \tag{1.63}$$

инъективен на M^θ *, то есть функция* $\psi(t)$ *однозначно определяется параметрами* α_0, α, β .

Доказательство. Действительно, набор $(\alpha_0, \alpha, \beta)$ однозначно определяет функцию $l = \alpha_0 F_0 + \alpha F + \beta K$, а значит и функцию ψ — с помощью условий

$$-\dot{\psi} = \psi \hat{f}_x, \qquad \psi(\hat{t}_0) = \hat{l}_{x_0}.$$

Следовательно, проектор (1.63) инъективен на M^θ .

Ограниченность M^θ вытекает из условия нормировки $\alpha_0 + |\alpha| + |\beta| = 1$. Замкнутость M^θ очевидна. Следовательно, M^θ — конечномерный компакт. □

8. Организация принципов максимумов индексов θ . Завершение доказательства принципа максимума задачи B . Напомним, что индекс θ есть множество пар (t^k, u^k), $\quad k = 1, \ldots, s$, где t^k неубывают, $t^k \in [\hat{t}_0, \hat{t}_1]$, $\quad u^k \in U$ произвольны.

Введем на множестве индексов θ отношение частичного порядка: $\theta_1 < \theta_2$ (θ_2 следует за θ_1), если любая пара (t^k, u^k) первого индекса принадлежит второму индексу. Покажем, что данное отношение порядка является *направлением* на множестве индексов.

Пусть имеется пара индексов θ^1 и θ^2 , возможно, не сравнимых. Возьмем все пары (t^k, u^k) первого индекса и все пары $(t^{k'}, u^{k'})$ второго индекса и объединим их. Из объединения пар составим новый индекс θ_3 . Обозначим его $\theta_3 = \theta_1 \vee \theta_2$. Ясно, что $\theta_1 < \theta_3$ и $\theta_2 < \theta_3$. Итак, за любыми двумя индексами следует третий. Каждому индексу θ соответствует непустой компакт M^θ . Ясно, что при "расширении"индекса соответствующее множество M^θ сужается:

$$\theta_1 < \theta_2 \quad \Rightarrow \quad M^{\theta_2} \subset M^{\theta_1}.$$

Отсюда, в свою очередь, вытекает, что семейство M^θ центрировано. Действительно, если имеется конечный набор $M^{\theta_1}, \ldots, M^{\theta_r}$, то полагая $\theta = \theta_1 \vee \theta_2 \vee \ldots \vee \theta_r$, получаем непустое M^θ , содержащийся в каждом M^{θ_k} (ибо $\theta_k < \theta$), а значит, и в их пересечении. Положим

$$M = \bigcap_\theta M^\theta,$$

где пересечение берется по всем индексам θ . Тогда M непусто.

Возьмем любое $\lambda = (\alpha_0, \alpha, \beta, \psi) \in M.$ Для него выполнены все условия (a)–(f) принципа максимума любого индекса θ . Для любых $t = t^k \in [\hat{t}_0, \hat{t}_1]$, $\quad u = u^k \in U$ пара (t^k, u^k) входит в некоторый индекс θ . Для этого индекса из (e) получаем:

$$H(\hat{x}(t), u, \psi(t)) = \psi(t) f(\hat{x}(t), u) \leqslant 0.$$

Это условие, выполненное для любого $t \in [\hat{t}_0, \hat{t}_1]$ и любого $u \in U$, и есть условие максимума (vi).

Нам теперь понадобится один простой факт.

Лемма 3. *Пусть* $h(t):[t_0,t_1]\to\mathbb{R}$ *интегрируема по Лебегу. Пусть для любого интервала* $\Delta\subset[t_0,t_1]$ *имеет место равенство:* $\int_\Delta h(t)dt=0$. *Тогда* $h(t)=0$ *п.в. на* $[t_0,t_1]$.

Доказательство. Рассмотрим функцию $y(t)=\int\limits_{t_0}^{t} h(\tau)\,d\tau$. Она абсолютно непрерывна и по условию равна нулю тождественно. Как известно из ТФДП, почти всюду $\dot y(t)=h(t)$, а поскольку у нас $\dot y(t)\equiv 0$, то получаем $h(t)=0$ п.в. □

Для любого интервала $\Delta\subset[\hat t_0,\hat t_1]$ найдется индекс θ такой, что Δ есть один из интервалов множества $\mathcal{N}_+$ данного индекса. Следовательно, в силу (f),

$$\int\limits_\Delta \psi\hat f dt=0 \qquad \text{для любого } \Delta\subset[\hat t_0,\hat t_1].$$

Отсюда в силу леммы 3 получаем:

$$H(\hat x(t),\hat u(t),\psi(t))=\psi(t)f(\hat x(t),\hat u(t))=0 \quad \text{п.в. на} \quad [\hat t_0,\hat t_1].$$

Это — условие (vii). Остальные условия (неотрицательности, нетривиальности, дополняющей нежесткости, сопряженное уравнение и условие трансверсальности) совпадают для всех индексов. Принцип максимума задачи B полностью доказан. Таким образом, завершено доказательство теоремы 6.

1.5 Принцип максимума в задаче A .

Напомним постановку задачи A :

$$F_0(p)\to\min,\quad F(p)\leqslant 0,\quad K(p)=0,\quad \dot x=f(t,x,u),\quad u\in U,$$

где $p=(t_0,x_0,t_1,x_1)$, $x_0=x(t_0)$, $x_1=x(t_1)$, концы t_0,t_1 не фиксированы, $F\in\mathbb{R}^k$, $K\in\mathbb{R}^q$, $x\in\mathbb{R}^n$, $u\in\mathbb{R}^m$, $f\in\mathbb{R}^n$. Отличие от только что рассмотренной задачи состоит в том, что f зависит от t , а F_0 , F и K зависят от t_0 , t_1 .

Пусть траектория $\Upsilon=(x(t),u(t)\mid t\in[t_0,t_1])$ допустима в задаче A . Сформулируем для нее принцип максимума. Введем концевую функцию Лагранжа

$$l(p)=\alpha_0F_0+\alpha F+\beta K,\ \text{где}\ \alpha_0\in\mathbb{R},\quad \alpha\in(\mathbb{R}^k)^*,\quad \beta\in(\mathbb{R}^q)^*,$$

и функцию Понтрягина $H(t,x,u)=\psi_x f+\psi_t$, где $\psi_x\in(\mathbb{R}^n)^*$, $\psi_t\in\mathbb{R}$

(зависимость функции l от множителей Лагранжа α_0 , α , β и функции H от множителя ψ для краткости опускаем).

Отметим, что здесь ψ_x и ψ_t - двойственные переменные, связанные с переменными x и t соответственно. (Ранее нижний индекс x всегда означал вычисление градиента по x , например, f_x ; здесь же индексы x и t имеют указанный выше смысл; надеемся, что это не приведет к путанице. Удобство такой индексации сопряженных переменных будет оценено при работе с принципом максимума, в частности, при решении задач.)

Определение 1.1. Будем говорить, что для траектории Υ задачи A выполнен принцип максимума, если существуют число α_0 , векторы $\alpha\in(\mathbb{R}^k)^*$, $\beta\in(\mathbb{R}^q)^*$ и липшицевы функции $\psi_x(t):[t_0,t_1]\to(\mathbb{R}^n)^*$, $\psi_t(t):[t_0,t_1]\to\mathbb{R}$ такие, что выполнены условия:

(I) неотрицательности

$$\alpha_0 \geqslant 0, \quad \alpha \geqslant 0;$$

(II) нетривиальности

$$\alpha_0 + |\alpha| + |\beta| > 0;$$

(III) дополняющей нежесткости

$$\alpha_i F_i(p) = 0, \quad i = 1, \dots, k, \quad \text{где} \quad p = (t_0, x(t_0), t_1, x(t_1));$$

(IV) сопряженные уравнения

$$-\dot{\psi}_x(t) = H_x(t, x(t), u(t)),$$

$$-\dot{\psi}_t(t) = H_t(t, x(t), u(t));$$

(V) трансверсальности

$$\psi_t(t_0) = l_{t_0}(p), \qquad -\psi_t(t_1) = l_{t_1}(p),$$

$$\psi_x(t_0) = l_{x_0}(p), \qquad -\psi_x(t_1) = l_{x_1}(p);$$

(VI) максимума

$$H(t, x(t), u) \leqslant 0 \quad \text{для любых} \ t \in [t_0, t_1], \quad u \in U;$$

(VII) равенство нулю гамильтониана

$$H(t, x(t), u(t)) = 0 \qquad \text{п.в. на} \quad [t_0, t_1].$$

Теорема 12. *Если* Υ *— решение задачи* A *, то для* Υ *выполнен принцип максимума.*

Доказательство. Пусть $\Upsilon = (x(t), u(t) \mid t \in [t_0, t_1])$ — решение задачи A . Положим $\tau_0 = t_0$, $\tau_1 = t_1$, $t(\tau) = \tau$. Тогда $\Upsilon' = (t(\tau), x(\tau), u(\tau) \mid \tau \in [\tau_0, \tau_1])$ — решение следующей задачи A' :

$$F_0(p) \to \min, \quad F(p) \leqslant 0, \quad K(p) = 0$$

$$\frac{dx}{d\tau} = f(t, x, u), \quad \frac{dt}{d\tau} = 1,$$

где $p = (t(\tau_0), x(\tau_0), t(\tau_1), x(\tau_1))$. Это было объяснено в параграфе 1, пункт 4. Задача A' — того же типа, что и задача B . Выпишем условия принципа максимума для траекторий Υ' в задаче B' :

существуют число α_0 , векторы α и β , липшицевы функции

$$\psi_x(\tau) : [\tau_0, \tau_1] \to (\mathbb{R}^n)^*, \quad \psi_t(\tau) : [\tau_0, \tau_1] \to \mathbb{R}$$

такие, что

$$\alpha_0 \geqslant 0, \ \alpha \geqslant 0, \ \ \alpha_0 + |\alpha| + |\beta| > 0, \ \ \alpha F(p) = 0,$$

$$-\frac{d\psi_x}{d\tau} = H_x, \quad -\frac{d\psi_t}{d\tau} = H_t,$$

$$\psi_x(\tau_0) = l_{x_0}, \quad -\psi_x(\tau_1) = l_{x_1},$$

$$\psi_t(\tau_0) = l_{t_0}, \quad -\psi_t(\tau_1) = l_{t_1}, \tag{1.64}$$

$$H(t(\tau), x(\tau), u) \leqslant 0, \quad \forall \tau \in [\tau_0, \tau_1] \quad \forall u \in U;$$

$$H(t(\tau), x(\tau), u(\tau)) = 0, \quad \text{п.в. на} \quad [\tau_0, \tau_1],$$

где $l = \alpha_0 F_0 + \alpha F + \beta K$, $\quad H = \psi_x f + \psi_t$, градиенты функции l вычисляются в точке $(t(\tau_0), x(\tau_0), t(\tau_1), x(\tau_1))$, а градиенты функции H — на траектории $(t(\tau), x(\tau), u(\tau)), \tau \in [\tau_0, \tau_1]$.

Рассмотрим набор $(\alpha_0, \alpha, \beta, \psi_t(t), \psi_x(t))$. Элементарно проверяется, что он удовлетворяет всем условиям принципа максимума для траектории Υ в задаче A . Теорема доказана. □

1.6 Уточнение условий принципа максимума. Гамильтониан

1. Экстремаль управляемой системы. Рассмотрим управляемую систему

$$\dot{x} = f(t, x, u), \quad u \in U, \tag{1.65}$$

где $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^m$, $U \subset \mathbb{R}^m$ — произвольное множество, f , f_x и f_t непрерывны по всем переменным. Введем для нее *функцию Понтрягина*

$$H = H(t, x, u, \psi_x) = \psi_x f(t, x, u).$$

(Ранее мы пользовались несколько иным определением функции Понтрягина, полагая $H = \psi_x f + \psi_t$. Так ее определили Дубовицкий и Милютин. Мы видели, что эта функция возникает естественно в том процессе доказательства принципа максимума, которому мы следовали. Однако подобное определение функции H не стало общепринятым. Позднее сам А.А. Милютин вернулся к первоначальному определению H в виде $\psi_x f$, данному Л.С. Понтрягиным).

Определение 1.2. Четверку функций $(x(t), u(t), \psi_t(t), \psi_x(t) \mid t \in [t_0, t_1])$, определенных на произвольном отрезке $\Delta = [t_0, t_1]$, будем называть *экстремалью* управляемой системы (1.65), если

(a) $(x(t), u(t) \,|\, t \in [t_0, t_1])$ — траектория управляемой системы (1.65), т.е. $x(t)$ – абсолютно непрерывная на Δ , $u(t)$ – ограничена и измерима на Δ , и

$$\dot{x} = f(t, x(t), u(t)), \quad u(t) \in U \quad \text{п.в. на} \quad \Delta; \tag{1.66}$$

(b) функции $\psi_t(t)$ и $\psi_x(t)$ абсолютно непрерывны на Δ и выполнены условия

$$-\dot{\psi}_t(t) = H_t(t, x(t), u(t), \psi_x(t)) \quad \text{п.в. на} \quad \Delta, \tag{1.67}$$

$$-\dot{\psi}_x(t) = H_x(t, x(t), u(t), \psi_x(t)) \quad \text{п.в. на} \quad \Delta, \tag{1.68}$$

$$H(t, x(t), u, \psi_x(t)) + \psi_t(t) \leqslant 0 \;\; \forall u \in U, \;\; \forall t \in \Delta, \tag{1.69}$$

$$H(t, x(t), u(t), \psi_x(t)) + \psi_t(t) = 0 \quad \text{п.в. на} \quad \Delta. \tag{1.70}$$

Итак, экстремаль определяется условиями (1.66)-(1.70). Нетрудно видеть, что (1.67)-(1.70) — это условия принципа максимума (в которые не вошли условия неотрицательности, нетривиальности, дополняющей нежесткости и трансверсальности).

Экстремали, определенные условиями (1.66)-(1.70), называют также *понтрягинскими экстремалями*, но мы будем говорить просто – экстремаль.

Наша цель будет состоять в том, чтобы показать, что условия экстремальности можно переписать эквивалентным образом так, что переменная ψ_t в новых условиях участвовать не будет, т.е. ψ_t можно из условий экстремальности исключить вместе с сопряженным уравнением (1.67). Мы сделаем это, предположив, что множество U *замкнуто*. Ниже это предположение считаем выполненным.

2. Гамильтониан. Рассмотрим функцию Гамильтона

$$\mathcal{H}(t, x, \psi_x) = \max_{u \in U} H(t, x, u, \psi_x) \tag{1.71}$$

Обозначим через $\operatorname{dom} \mathcal{H}$ множество троек (t, x, ψ_x) таких, что максимум по $u \in U$ в правой части равенства (1.71) достигается. Мы покажем, что для экстремали выполнены условия

$$(t, x(t), \psi_x(t)) \in \operatorname{dom} \mathcal{H} \quad \forall t \in \Delta, \tag{1.72}$$

$$\mathcal{H}(t, x(t), \psi_x(t)) + \psi_t(t) = 0 \quad \forall t \in \Delta. \tag{1.73}$$

Другими словами,

$$\max_{u \in U} H(t, x(t), u, \psi_x) + \psi_t(t) = 0 \quad \forall t \in \Delta, \tag{1.74}$$

причем для каждого $t \in \Delta$ максимум в левой части формулы (1.74) достигается. С этой целью мы докажем две леммы.

Лемма 4. *Пусть* $h(t, u)$ *непрерывна по* (t, u) *, где* $t \in \Delta,\ u \in U$ *. Пусть существует множество* $\mathcal{E} \subset \Delta$ *и компакт* $K \subset U$ *такие, что замыкание* $\mathcal{E}$ *совпадает с* Δ *(то есть* $\bar{\mathcal{E}} = \Delta$ *) и*

$$\sup_{u \in U} h(t, u) = \max_{u \in K} h(t, u) \quad \forall t \in \mathcal{E}. \tag{1.75}$$

Тогда

$$\sup_{u \in U} h(t, u) = \max_{u \in K} h(t, u) \quad \forall t \in \Delta. \tag{1.76}$$

Доказательство. Пусть $\tilde{t} \in \Delta,\ u \in U$. Поскольку $\bar{\mathcal{E}} = \Delta$, то найдется последовательность $t_n \in \mathcal{E}$ такая, что $t_n \to \tilde{t}$. Для последовательности t_n укажем последовательность $u_n \in K$ точек максимума функции $h(t_n, \cdot)$ по компакту K . Тогда в силу (1.75)

$$h(t_n, u) \leqslant h(t_n, u_n). \tag{1.77}$$

Не ограничивая общности, считаем, что $u_n \to \tilde{u} \in K$ (иначе перейдем к подпоследовательности). Переходя в (1.77) к пределу по n , получаем:

$$h(\tilde{t}, u) \leqslant h(\tilde{t}, \tilde{u}). \tag{1.78}$$

Итак, для любого $u \in U$ найдется $\tilde{u} \in K$ такой, что выполнено (1.78) (при этом $\tilde{t} \in \Delta$ произвольно). Пусть последовательность $u_n \in U$ такова, что

$$h(\tilde{t}, u_n) \to \sup_{u \in U} h(\tilde{t}, u). \tag{1.79}$$

Тогда в силу (1.78) найдется последовательность $\tilde{u}_n \in K$ такая, что

$$h(\tilde{t}, u_n) \leqslant h(\tilde{t}, \tilde{u}_n). \tag{1.80}$$

Не ограничивая общности, считаем, что $\tilde{u}_n \to \tilde{u} \in K$ (иначе перейдем к подпоследовательности). Переходя к пределу в (1.80) и учитывая (1.79) получаем:

$$\sup_{u\in U} h(\tilde{t}, u) \leqslant h(\tilde{t}, \tilde{u}) \leqslant \max_{u\in K} h(t, u).$$

Поскольку $K \subset U$, то отсюда вытекает равенство

$$\sup_{u\in U} h(\tilde{t}, u) = \max_{u\in K} h(\tilde{t}, u),$$

справедливое для любого $\tilde{t} \in \Delta$.

Лемма 5. *Пусть* $K \subset \mathbb{R}^m$ *— компакт,* Δ *— отрезок, и пусть* $h(t, u)$ *непрерывна на* $\Delta \times K$. *Тогда функция*

$$\varphi(t) = \max_{u\in K} h(t, u)$$

непрерывна на Δ.

Доказательство. Пусть $\tilde{t} \in \Delta$ и пусть $t_n \in \Delta$ - произвольная последовательность такая, что $t_n \to \tilde{t}$. Покажем, что найдется подпоследовательность t_{n_k} такая, что $\varphi(t_{n_k}) \to \varphi(\tilde{t})$. (Отсюда последует непрерывность φ в точке $\tilde{t}$.)

Действительно, для последовательности t_n найдется последовательность $u_n \in K$ такая, что $\varphi(t_n) = h(t_n, u_n)$. Из последовательности u_n извлечем сходящуюся подпоследовательность. Пусть это сама u_n. Тогда $u_n \to \tilde{u} \in K$. Пусть $u \in K$ — произвольный элемент. Тогда $h(t_n, u) \leqslant h(t_n, u_n)$. Переходя в этом неравенстве к пределу по n, получаем $h(\tilde{t}, u) \leqslant h(\tilde{t}, \tilde{u})$. Поскольку это верно $\forall\, u \in K$, то

$$h(\tilde{t}, \tilde{u}) = \max_{u\in K} h(\tilde{t}, u) = \varphi(\tilde{t}).$$

Итак,

$$\varphi(\tilde{t}) = h(\tilde{t}, \tilde{u}) = \lim_n h(t_n, u_n) = \lim_n \varphi(t_n).$$

Мы показали, что $\varphi(t_n) \to \varphi(\tilde{t})$. (В действительности это имеет место для подпоследовательности). Непрерывность φ в произвольной точке $\tilde{t} \in \Delta$ доказана. □

Обратимся теперь к условиям (1.66)-(1.70), определяющим экстремаль. Поскольку $u(t)$ существенно ограничена, то найдется замкнутый шар $B \subset \mathbb{R}^m$ такой, что $u(t) \in B$ п.в. на Δ. Положим $K = U \cap B$. Тогда K — компакт, ибо U – замкнутое множество, $K \subset U$ и $u(t) \in K$ п.в. на Δ. Пусть $\mathcal{E}$ множество полной меры в Δ такое, что $u(t) \in K$ на $\mathcal{E}$ и всюду на $\mathcal{E}$ выполнено условие (1.70) в определении экстремали. Отметим, что $\bar{\mathcal{E}} = \Delta$. Положим

$$h(t, u) = H(t, x(t), u, \psi_x(t)) \tag{1.81}$$

Тогда в силу (1.69) и (1.70) имеем

$$h(t, u) + \psi_t(t) \leqslant 0 \quad \forall t \in \Delta \quad \forall u \in U, \tag{1.82}$$

$$h(t, u(t)) + \psi_t(t) = 0 \quad \forall t \in \mathcal{E}. \tag{1.83}$$

Кроме того, $u(t) \in K \quad \forall t \in \mathcal{E}$. Отсюда и из (1.82), (1.83) получаем:

$$\sup_{u\in U} h(t, u) = \max_{u\in K} h(t, u) = -\psi_t(t) \quad \forall t \in \mathcal{E}. \tag{1.84}$$

Отсюда в силу леммы 4 вытекает, что

$$\sup_{u\in U} h(t,u) = \max_{u\in K} h(t,u) \quad \forall t \in \Delta\,. \tag{1.85}$$

Поскольку $K \subset U$, то из (1.85) получаем:

$$\sup_{u\in U} h(t,u) = \max_{u\in U} h(t,u) \quad \forall t \in \Delta\,, \tag{1.86}$$

т.е. максимум реализуется для всех $t \in \Delta$. Согласно (1.84),

$$\max_{u\in K} h(t,u) = -\psi_t(t) \quad \forall t \in \mathcal{E}\,. \tag{1.87}$$

Но функция ψ_t липшицева, а функция в левой части равенства (1.87) непрерывна — в силу леммы 5. Поскольку $\bar{\mathcal{E}} = \Delta$, то из (1.87) следует, что

$$\max_{u\in K} h(t,u) = -\psi_t(t) \quad \forall t \in \Delta\,. \tag{1.88}$$

Из (1.85), (1.86) и (1.88) вытекает, что

$$\max_{u\in U} h(t,u) = -\psi_t(t) \quad \forall t \in \Delta\,, \tag{1.89}$$

причем максимум в левой части равенства реализуется $\forall t \in \Delta$. Вспоминая определение (1.81) функции $h(t,u)$, получаем отсюда

$$\max_{u\in U} H(t,x(t),u,\psi_x(t)) + \psi_t(t) = 0 \quad \forall t \in \Delta\,, \tag{1.90}$$

причем максимум реализуется $\forall t \in \Delta$. Следовательно, для гамильтониана $\mathcal{H}$ имеют место условия (1.72) и (1.73).

Из (1.70) и (1.73) получаем:

$$H(t,x(t),u(t),\psi_x(t)) = \mathcal{H}(t,x(t),\psi_x(t)) \text{ п.в. на } \Delta. \tag{1.91}$$

Последнее условие можно представить в виде:

$$u(t) \in \operatorname{Arg}\max_{u\in U} H(t,x(t),u,\psi_x(t)) \text{ п.в. на } \Delta, \tag{1.92}$$

где правая часть (1.92) есть множество тех $u \in U$, на которых реализуется максимум функции $H(t,x(t),u,\psi_x(t))$ по $u \in U$.

Итак, доказана

Теорема 13. *Пусть множество U замкнуто. Тогда для всякой экстремали $\Big(x(t),u(t),\psi_t(t),\psi_x(t) \mid t\in\Delta\Big)$ системы (1.65) выполнены условия:*

(a) $(t,x(t),\psi_x(t)) \in dom\,\mathcal{H} \quad \forall t \in \Delta$,

(b) $H(t,x(t),u(t),\psi_x(t)) = \mathcal{H}(t,x(t),\psi_x(t))$ *п.в. на* Δ ,

(c) $\mathcal{H}(t,x(t),\psi_x(t)) + \psi_t(t) = 0 \quad \forall t \in \Delta$,

(d) существует компакт $K \subset U$ такой, что

$$\max_{u\in K} H(t,x(t),u,\psi_x(t)) = \mathcal{H}(t,x(t),\psi_x(t)) \quad \forall t \in \Delta.$$

Последнее равенство вытекает из (1.88), (1.89).

Итак, согласно теореме 13 и определению экстремали, для всякой экстремали выполнены условия:

(I) $\dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t))$ п.в. на Δ ,

(II) $u(t) \in U$ п.в. на Δ ,

(III) $-\dot{\psi}_x(t) = H_x(t, x(t), u(t), \psi_x(t))$ п.в. на Δ ,

(IV) $(t, x(t), \psi_x(t)) \in \mathrm{dom}\mathcal{H}$ $\forall t \in \Delta$,

(V) $H(t, x(t), u(t), \psi_x(t)) = \mathcal{H}(t, x(t), \psi_x(t))$ п.в. на Δ .

Последнее условие, как уже отмечалось, эквивалентно условию (1.92).

В условиях (I)-(V) компонента ψ_t отсутствует. Покажем, что эти условия эквивалентным образом определяют экстремаль. Точнее, докажем следующую теорему.

Теорема 14. *Пусть траектория*

$$(x(t), u(t), \psi_x(t) \mid t \in \Delta) \tag{1.93}$$

такова, что $x(t), \psi_x(t)$ *абсолютно непрерывны на* Δ , $u(t)$ *ограничена и измерима на* Δ *и выполнены условия (I)-(V) (* $\Delta = [t_0, t_1]$ *). Пусть* U *замкнуто. Тогда функция* $\psi_t(t) := -\mathcal{H}(t, x(t), \psi_x(t))$ *удовлетворяет на* Δ *условию Липшица и уравнению*

$$-\dot{\psi}_t(t) = H_t(t, x(t), u(t), \psi_x(t)) \qquad \text{п.в. на } \Delta,$$

а четверка $\Big(x(t), u(t), \psi_t(t), \psi_x(t) \mid t \in \Delta\Big)$ *есть экстремаль системы (1.65).*

Итак, не ограничивая общности, под экстремалью системы (1.65) можно понимать тройку (1.93), удовлетворяющую условиям (I)-(V). При этом выполнено равенство

$$\frac{d}{dt}\mathcal{H}(t, x(t), \psi_x(t)) = H_t(t, x(t), u(t), \psi_x(t)) \text{ п.в. на } \Delta, \tag{1.94}$$

вытекающее из условий (I)-(V). Это утверждает теорема 14.

Для доказательства теоремы 14 понадобятся две леммы.

Лемма 6. *Пусть* $K \subset \mathbb{R}^m$ *– компакт,* Δ *– отрезок,* $h(t, u) : \Delta \times K \mapsto \mathbb{R}$ *— непрерывная функция. Пусть существует константа* L *такая, что* $|h(\tau_2, u) - h(\tau_1, u)| \leqslant L|\tau_2 - \tau_1|$ *для любых* $\tau_1, \tau_2 \in \Delta,\ u \in U$ *. Тогда функция*

$$\varphi(t) = \max_{u \in K} h(t, u)$$

удовлетворяет на Δ *условию Липшица с константой* L *.*

Доказательство. Пусть $\tau_1, \tau_2 \in \Delta$. Выберем $u_1, u_2 \in K$ так, что $\varphi(\tau_k) = h(\tau_k, u_k)$, $k = 1, 2$. Тогда $\varphi(\tau_2) - \varphi(\tau_1) = h(\tau_2, u_2) - h(\tau_1, u_1)$. Поскольку u_1 — точка максимума функции $h(\tau_1, u)$ по $u \in K$, то $h(\tau_1, u_1) \geqslant h(\tau_1, u_2)$.
Следовательно, $\varphi(\tau_2) - \varphi(\tau_1) \leqslant h(\tau_2, u_2) - h(\tau_1, u_2) \leqslant L|\tau_2 - \tau_1|$.

Аналогично, $\varphi(\tau_1) - \varphi(\tau_2) \leqslant L|\tau_1 - \tau_2|$, и поэтому $|\varphi(\tau_2) - \varphi(\tau_1)| \leqslant L|\tau_2 - \tau_1|$.
Лемма доказана. □

Лемма 7. *Пусть* $K \subset \mathbb{R}^m$ *— компакт,* Δ *— отрезок,* $h(t,u) : \Delta \times K \mapsto \mathbb{R}$ *— непрерывная функция. Положим*

$$\varphi(t) = \max_{u \in K} h(t,u).$$

Пусть $\tilde{t} \in int\, \Delta$ *, и пусть* $\tilde{u} \in K$ *— точка максимума функции* $h(\tilde{t},u)$ *по* $u \in K$ *, т.е.* $\varphi(\tilde{t}) = h(\tilde{t},\tilde{u})$. *Пусть существуют производные* $\dot{\varphi}(\tilde{t})$ *и* $h'_t(\tilde{t},\tilde{u})$. *Тогда* $\dot{\varphi}(\tilde{t}) = h'_t(\tilde{t},\tilde{u})$.

Доказательство. Положим $\psi(t) = h(t,\tilde{u})$. Тогда функция $\psi(t)$ дифференцируема в точке $\tilde{t}$ и при этом $\dot{\psi}(\tilde{t}) = h'_t(t,\tilde{u})$. Кроме того, функции $\psi(t)$ и $\varphi(t)$ удовлетворяют условиям:

(a) $\varphi(\tilde{t}) = \psi(\tilde{t})$ (т.к. $\psi(\tilde{t}) = h(\tilde{t},\tilde{u}) = \varphi(\tilde{t})$);

(b) $\varphi(t) \geqslant \psi(t) \quad \forall t \in \Delta$ (т.к. $\varphi(t) = \max_{u \in K} h(t,u) \geqslant h(t,\tilde{u}) = \psi(t)$).

Из (a) и (b) с очевидностью следует $\dot{\varphi}(\tilde{t}) = \dot{\psi}(\tilde{t})$. Отсюда $\dot{\varphi}(\tilde{t}) = h'_t(\tilde{t},\tilde{u})$.
Лемма доказана. □

3. Доказательство теоремы 14. Пусть тройка (1.93) удовлетворяет условиям (I)–(V). Положим, как и в доказательстве теоремы 13, $h(t,u) = H(t,x(t),u,\psi_x(t))$. В силу (V) существует множество $\mathcal{E} \subset \Delta$ полной меры такое, что

$$h(t,u(t)) = \max_{u \in U} h(t,u) \quad \forall t \in \mathcal{E}.$$

Пусть K — такой компакт в U, что $u(t) \in K$ п.в. на Δ . Считаем, не ограничивая общности, что $u(t) \in K \quad \forall t \in \mathcal{E}$. Тогда

$$\max_{u \in K} h(t,u) = \max_{u \in U} h(t,u) \quad \forall t \in \mathcal{E}.$$

Поскольку $\bar{\mathcal{E}} = \Delta$, то в силу леммы 4

$$\max_{u \in K} h(t,u) = \max_{u \in U} h(t,u) \quad \forall t \in \Delta. \tag{1.95}$$

Далее, для любого фиксированного $u \in U$ п.в. на Δ имеем

$$\begin{aligned} h_t(t,u) = {} & H_t(t,x(t),u,\psi_x(t)) + H_x(t,x(t),u,\psi_x(t))\dot{x}(t) + \\ & + H_{\psi_x}(t,x(t),u,\psi_x(t))\dot{\psi}_x(t). \end{aligned} \tag{1.96}$$

Отсюда вытекает, что

$$\sup_{u \in K} \|h_t(\cdot,u)\|_\infty < +\infty.$$

Обозначим эту величину через L . Тогда ясно, что $|h(\tau_2,u) - h(\tau_1,u)| \leqslant L|\tau_2 - \tau_1|$ для всех $\tau_1,\tau_2 \in \Delta, u \in K$. Согласно лемме 6, $\varphi(t) = \max_{u \in K} h(t,u)$ есть липшицева функция на Δ. При этом из определения функции h и равенства (1.95) вытекает, что

$$\varphi(t) = \max_{u \in K} H(t,x(t),u,\psi_x(t)) \;=\; \mathcal{H}(t,x(t),\psi_x(t)) \quad \forall t \in \Delta. \tag{1.97}$$

Таким образом, $\mathcal{H}(t,x(t),\psi_x(t))$ — липшицева функция на Δ .

Пусть теперь $\mathcal{E}_1 \subset \Delta$ — множество полной меры, такое, что в каждой точке $t \in \mathcal{E}_1$ выполнены пять условий:

(a) существуют $\dot{\varphi}(t), \dot{x}(t), \dot{\psi}_x(t)$;

(b) $\varphi(t) = h(t, u(t))$ (см.условие (V));

(c) $\dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t))$;

(d) $-\dot{\psi}_x(t) = H_x(t, x(t), u(t), \psi_x(t))$;

(e) $u(t) \in K$.

Ясно, что такое множество существует, поскольку каждое из условий выполнено п.в. на Δ .

Пусть $t \in \mathcal{E}_1$. Тогда существует $h_t(t, u(t))$. Действительно, согласно равенству (1.96) и определению множества $\mathcal{E}_1$ имеем

$$h_t(t, u(t)) = H_t(t, x(t), u(t), \psi_x(t)) + H_x(t, x(t), u(t), \psi_x(t))\dot{x}(t) +$$

$$+ H_{\psi_x}(t, x(t), u(t), \psi_x(t))\dot{\psi}_x(t).$$

В силу (c), (d) и условия $H_{\psi_x} = f$ сумма двух последних слагаемых равна нулю. Следовательно,

$$h_t(t, u(t)) = H_t(t, x(t), u(t), \psi_x(t)) \tag{1.98}$$

Согласно лемме 7, $\dot{\varphi}(t) = h_t(t, u(t))$. Отсюда и из (1.97), (1.98) получаем, что

$$\frac{d}{dt}\mathcal{H}(t, x(t), \psi_x(t)) \;=\; H_t(t, x(t), u(t), \psi_x(t)).$$

Это равенство имеет место всюду на $\mathcal{E}_1$, т.е. п.в. на Δ . Положим

$$-\psi_t(t) = \mathcal{H}(t, x(t), \psi_x(t)) \quad \forall t \in \Delta. \tag{1.99}$$

Тогда

$$-\dot{\psi}_t(t) = H_t(t, x(t), u(t), \psi_x(t)) \quad \text{п.в. на } \Delta.$$

Итак, для четверки $(x(t), u(t), \psi_t(t), \psi_x(t) \mid t \in \Delta)$ условия (1.66)-(1.68) в определении экстремали выполнены. Условие (1.69) вытекает из равенства (1.99). Наконец, из условия (V) и определения (1.99) функции $\psi_t(t)$ вытекает условие (1.70).

Таким образом, все условия (1.66)-(1.70), определяющие экстремаль, для данной четверки оказались выполнены. Теорема доказана. □

Замечание 1.1. Обратимся к условию максимума:

$$H(t, x(t), u(t), \psi_x(t)) = \mathcal{H}(t, x(t), \psi_x(t)). \tag{1.100}$$

Мы можем изменить $u(t)$ на множестве меры нуль так, что равенство (1.100) будет выполняться всюду на Δ , а не почти всюду, равно как и условие $u(t) \in U$.

Действительно, пусть $\mathcal{E} \subset \Delta$ -множество полной меры, на котором имеют место условие (1.100) и условие $u(t) \in U$. Пусть $K \subset U$ — такой компакт, что

$$\max_{u \in K} H(t, x(t), u, \psi_x(t)) = \mathcal{H}(t, x(t), \psi_x(t)) \qquad \forall\, t \in \Delta.$$

(Согласно пункту (d) теоремы 13 такой компакт существует). На множестве $\Delta\backslash\mathcal{E}$, имеющем нулевую меру, переопределим $u(t)$ так, чтобы выполнялись условия: $u(t) \in K$,

$$H(t, x(t), u(t), \psi_x(t)) = \max_{u \in K} H(t, x(t), u, \psi_x(t)).$$

Новая функция $u(t)$ окажется ограниченной, измеримой (почему?) и равенство (1.100) будет выполнено всюду на Δ . Тогда и равенство (1.70) выполнено всюду на Δ .

Итак, определяя экстремаль с помощью условий (1.66)-(1.70) мы можем считать, что вытекающие из них условия (1.99) и (1.100) выполнены для всех $t \in \Delta$. Аналогично, определяя экстремаль с помощью условий (I)-(V), мы можем считать, что условие (V) выполнено всюду на Δ . Мы можем также считать, что $u(t) \in U$ всюду на Δ и $u(t)$ ограничена всюду на Δ .

4. Уточнение условий принципа максимума. Вернемся к задаче A :

$$F_0(p) \to \min, \quad F(p) \leqslant 0, \quad K(p) = 0,$$

где $p = (t_0, x(t_0), t_1, x(t_1))$;

$$\dot{x} = f(t, x, u) \quad u \in U.$$

Пусть сначала множество U замкнуто.

Пусть траектория $(x(t), u(t) \mid t \in \Delta)$, $\Delta = [t_0, t_1]$ есть решение задачи A . Тогда для нее найдется число α_0 , векторы α, β и абсолютно непрерывные на Δ функции $\psi_t(t), \psi_x(t)$ такие, что выполнены все условия принципа максимума (см. условия (I)–(VII), параграф 1.4, пункт 1).

Теорема 13 позволяет уточнить эти условия в случае, когда U замкнуто. Условия (I)-(V): неотрицательности, нетривиальности, дополняющей нежесткости, сопряженные уравнения на ψ_t и ψ_x , а также условия трансверсальности, — сохраняются в прежнем виде:

$$\begin{aligned}
&\alpha_0 \geqslant 0, \quad \alpha \geqslant 0, \quad \alpha_0 + |\alpha| + |\beta| > 0, \quad \alpha F(p) = 0,\\
&-\dot{\psi}_t = H_t, \quad -\dot{\psi}_x = H_x, \quad \text{п.в. на } \Delta, \\
&\psi_t(t_0) = l_{t_0}, \quad -\psi_t(t_1) = l_{t_1}, \quad \psi_x(t_0) = l_{x_0}, \quad -\psi_x(t_1) = l_{x_1},
\end{aligned} \tag{1.101}$$

где

$$l = \alpha_0 F_0 + \alpha F + \beta K, \quad H = \psi_x f(t, x, u) = H(t, x, u, \psi_x)$$

(мы пользуемся новым определением функции Понтрягина H, введенным в начале данного параграфа). Условия (VI) и (VII) усиливаются, согласно теореме 13, до следующих условий

$$\begin{gathered}
(t, x(t), \psi_x(t)) \in \mathrm{dom}\mathcal{H} \quad \forall t \in \Delta, \\
\mathcal{H}(t, x(t), \psi_x(t)) + \psi_t = 0 \quad \forall t \in \Delta, \\
\mathcal{H}(t, x(t), \psi_x(t)) = H(t, x(t), u(t), \psi_x(t)) \quad \text{п.в. на } \Delta,
\end{gathered} \tag{1.102}$$

причем $u(t)$ можно изменить на множестве меры нуль так, что последнее равенство вместе с условием ограниченности $u(t)$ и условием $u(t) \in U$ окажутся выполненными всюду на Δ .

Ясно, что условиями (1.101) и (1.102) на практике пользоваться удобней.

Теорема 14 позволяет в случае, когда U замкнуто, дать следующую эквивалентную формулировку принципа максимума в задаче A : существует число α_0 , векторы α , β и абсолютно непрерывные функции $\psi_t(t)$, $\psi_x(t)$ такие, что выполнены все условия (1.101) и (1.102) за исключением сопряженного уравнения $-\dot{\psi}_t = H_t$. Согласно теореме 14 сопряженное уравнение на ψ_t является следствием остальных условий принципа максимума. Фактически это позволяет компоненту ψ_t из условий принципа максимума исключить воспользовавшись равенством $\psi_t(t) = -\mathcal{H}(t, x(t), \psi_x(t))$. Согласно той же теореме 14 функция $\mathcal{H}(t, x(t), \psi_x(t))$ абсолютно непрерывна. С ее помощью можно записать и условие трансверсальности на ψ_t :

$$-\mathcal{H}(t_0, x(t_0), \psi_x(t_0)) = l_{x_0}, \qquad \mathcal{H}(t_1, x(t_1), \psi_x(t_1)) = l_{x_1}.$$

Рассмотрим теперь случай когда U — произвольное множество. В этом случае условие максимума (VI) в формулировке принципа максимума можно, очевидно, распространить с множества U на его замыкание $\bar{U}$:

$$H(t, x(t), u, \psi_x(t)) + \psi_t(t) \leqslant 0 \qquad \forall\, u \in \bar{U},\ \ \forall\, t \in \Delta$$

(мы по-прежнему пользуемся определением H в виде $\psi_x f$), после чего мы снова можем применить теоремы 13 и 14. В результате мы получим те же уточнения в формулировках принципа максимума с той лишь разницей, что в определении гамильтониана $\mathcal{H}$ множество U заменится на его замыкание $\bar{U}$:

$$\mathcal{H}(t, x, \psi_x) = \max_{u \in \bar{U}} H(t, x, u, \psi_x),$$

причем, $\operatorname{dom} \mathcal{H}$ есть множество троек (t, x, ψ_x) таких, что максимум в правой части этого равенства достигается.

Наконец присутствие в задаче A ограничений $p \in \mathcal{P}$, $(t, x, u) \in \mathcal{Q}$, где $\mathcal{P}$ и $\mathcal{Q}$ — открытые множества, никак не влияет ни на справедливость принципа максимума, ни на его формулировку. Напомним лишь, что допустимость траектории $(x(t), u(t) \mid t \in \Delta)$, $\Delta = [t_0, t_1]$ по ограничению $\mathcal{Q}$ означает существование компакта $\Omega \subset \mathcal{Q}$ такого, что $(t, x(t), u(t)) \in \Omega$ п.в. на Δ .

На этом мы завершаем анализ условий принципа максимума.

1.7 Специальные классы задач.

1. Задача на фиксированном отрезке времени. Рассмотрим задачу

$$\mathcal{J} = F_0(p) \to \min, \quad F(p) \leqslant 0, \quad K(p) = 0, \quad \dot{x} = f(t, x, u), \quad u \in U, \tag{1.103}$$

где $p = (x(t_0), x(t_1))$, отрезок $\Delta = [t_0, t_1]$ — фиксирован. При сведении ее к задаче A в концевой блок добавляются условия

$$t_0 - \hat{t}_0 = 0, \qquad t_1 - \hat{t}_1 = 0,$$

после чего концевая функция Лагранжа приобретает вид:

$$\bar{l} = \beta_0(t_0 - \hat{t}_0) + \beta_1(t_1 - \hat{t}_1) + l,$$

где $l = \alpha_0 F_0 + \alpha F + \beta K.$

Условия трансверсальности для ψ_t дают

$$\psi_t(t_0) = \bar{l}_{t_0} = \beta_0, \qquad -\psi_t(t_1) = \bar{l}_{t_1} = \beta_1.$$

Покажем, что условие

$$\alpha_0 + |\alpha| + |\beta| > 0 \tag{1.104}$$

эквивалентно условию нетривиальности.

Действительно, пусть $\alpha_0 + |\alpha| + |\beta| = 0$. Тогда $\alpha_0 = 0$, $\alpha = 0$, $\beta = 0$ и, следовательно, $\bar{l}_{x_0} = l_{x_0} = 0$. Из условий $\psi_x(t_0) = \bar{l}_{x_0} = 0$ и $-\dot{\psi}_x = \psi_x f_x$ вытекает, что $\psi_x \equiv 0$, а тогда в силу условия $\psi_x f + \psi_t = 0$ п.в. получаем $\psi_t = 0$ и, следовательно, $\beta_0 = \beta_1 = 0$.

Итак, в качестве условия нетривиальности можно выбрать условие (1.104). Это позволяет убрать условия трансверсальности для ψ_t вместе с компонентами β_0 и β_1 из условий принципа максимума. Уравнение $-\dot{\psi}_t = H_t$, как мы знаем, вытекает из остальных условий принципа максимума, и его также можно исключить. Выпишем кратко в задаче (1.103) систему условий принципа максимума, к которой мы приходим в результате проведенного анализа.

Пусть $(x(t), u(t) \mid t \in \Delta)$ — решение задачи. Тогда существуют число α_0, векторы α, β и абсолютно непрерывная на Δ функция ψ_t такие, что

$$\alpha_0 \geqslant 0, \quad \alpha \geqslant 0, \quad \alpha_0 + |\alpha| + |\beta| > 0, \quad \alpha F(p) = 0, \tag{1.105}$$

$$-\dot{\psi} = H_x, \quad \text{п.в. на } \Delta, \tag{1.106}$$

$$\psi(t_0) = l_{x_0}, \quad -\psi_x(t_1) = l_{x_1}, \tag{1.107}$$

$$\max_{u \in \bar{U}} H(t, x(t), u, \psi(t)) = H(t, x(t), u(t), \psi(t)) \quad \text{п.в. на } \Delta, \tag{1.108}$$

причем максимум в левой части последнего равенства достигается при каждом $t \in \Delta$. Здесь $H(t, x, u, \psi) = \psi f(t, x, u)$ (мы заменили ψ_x на ψ).

Если обозначить левую часть равенства (1.108) через $(-\psi_t(t))$, то, как мы знаем, из условий принципа максимума последует, что ψ_t — липшицева функция и для нее выполнено сопряженное уравнение

$$-\dot{\psi}_t(t) = H_t(t, x(t), u(t), \psi(t)) \quad \text{п.в. на } \Delta.$$

2. Автономный случай. Рассмотрим управляемую систему

$$\dot{x} = f(x, u), \quad u \in U.$$

Здесь f не зависит явно от t. Такая система называется *автономной*. Для нее $H(x, u, \psi_x) = \psi_x f(x, u)$ не зависит от t. Поэтому сопряженное уравнение на ψ_t имеет вид $-\dot{\psi}_t = H_t = 0$, откуда вытекает, что $\psi_t = const$ для любой экстремали. Следовательно, на экстремали

$$\max_{u \in \bar{U}} H(x(t), u, \psi_x(t)) = const = H(x(t), u(t), \psi_x(t)).$$

Первое равенство выполняется всюду, а второе — почти всюду на Δ.

3. Задача с интегральным функционалом на фиксированном отрезке времени. Рассмотрим задачу

$$\mathcal{J} = \int_{t_0}^{t_1} F(x,u)dt \to \min, \quad \dot{x} = f(x,u), \quad u \in U, \quad x(t_0) = a, \quad x(t_1) = b, \tag{1.109}$$

где отрезок $\Delta = [t_0, t_1]$ фиксирован. Предполагается, что F, F_x, f, f_x непрерывны по x, u. Перепишем эту задачу в виде:

$$\mathcal{J} = y_1 - y_0 \to \min, \quad x_0 - a = 0, \quad x_1 - b = 0,$$

$$\dot{x} = f(x,u), \quad \dot{y} = F(x,u), \quad u \in U\,.$$

Здесь $l = \alpha_0(y_1 - y_0) + \beta_0(x_0 - a) + \beta_1(x_1 - a), \quad H = \psi_x f(x,y) + \psi_y F$.

Поскольку t_0, t_1 фиксированы и управляемая система автономна, то условия принципа максимума имеют следующий вид:

$$\alpha_0 \geqslant 0, \quad \alpha_0 + |\beta_0| + |\beta_1| > 0, \tag{1.110}$$

$$-\dot{\psi}_y = 0, \quad \psi_y(t_0) = -\alpha_0, \quad \psi_y(t_1) = \alpha_0, \tag{1.111}$$

$$-\dot{\psi}_x = H_x, \quad \psi_x(t_0) = \beta_0, \quad -\psi_x(t_1) = \beta_1, \tag{1.112}$$

$$\max_{u \in \bar{U}} H(x(t), u, \psi_x(t), \psi_y(t)) = const = H(x(t), u(t), \psi_x(t), \psi_y(t)), \tag{1.113}$$

причем первое из равенств (1.113) выполняется всюду, а второе — почти всюду на Δ .

Из условий (1.111) следует, что $\psi_y \equiv -\alpha_0$. Тогда $H = \psi_x f(x,y) - \alpha_0 F(x,u)$. Предположим, что $\alpha_0 = 0$, $\beta_0 = 0$. Тогда из условий $\psi_x(t_0) = 0, \quad -\dot{\psi}_x = \psi_x f_x$ вытекает, что $\psi_x \equiv 0$ и, следовательно $\psi_x(t_1) = -\beta_1 = 0$. Поэтому условие нетривиальности эквивалентно условию $\alpha_0 + |\beta_0| > 0$, или $\alpha_0 + |\psi_x(t_0)| > 0$.

Положим теперь $\psi_x = \psi$ и

$$H = \psi f(x,u) - \alpha_0 F(x,u) = H(x, u, \psi, \alpha_0). \tag{1.114}$$

Тогда принцип максимума для допустимой пары $(x(t), u(t) \mid t \in \Delta)$ в задаче (1.109) формулируется следующим образом:

существует число α_0 и абсолютно непрерывная на Δ функция $\psi(t)$ такие, что

$$\alpha_0 \geqslant 0, \quad \alpha_0 + |\psi(t_0)| > 0, \tag{1.115}$$

$$-\dot{\psi} = H_x(x(t), u(t), \psi(t), \alpha_0) \text{ п.в. }, \tag{1.116}$$

$$\max_{u \in \bar{U}} H(x(t), u, \psi(t), \alpha_0) = const = H(x(t), u(t), \psi(t), \alpha_0), \tag{1.117}$$

причем первое из равенств (1.117) выполняется всюду на Δ , а второе — почти всюду.

4. Задача быстродействия. Рассмотрим задачу:

$$\begin{gathered} T \to \min, \quad x(0) = a, \quad x(T) = b, \\ \dot{x} = f(x,u), \quad u \in U. \end{gathered} \tag{1.118}$$

Перепишем ее в виде:

$$t_1 \to \min, \quad t_0 = 0, \quad x_0 - a = 0, \quad x_1 - b = 0,$$

$$\dot{x} = f(x,u), \quad u \in U.$$

Здесь

$$l = \alpha_0 t_1 + \beta_t t_0 + \beta_0(x_0 - a) + \beta_1(x_1 - b),$$

$$H = \psi_x f(x,y) = H(x,u,\psi_x).$$

Условия принципа максимума имеют вид:

$$\alpha_0 \geqslant 0, \quad \alpha_0 + |\beta_t| + |\beta_0| + |\beta_1| > 0, \tag{1.119}$$

$$-\dot{\psi}_x = H_x, \quad \psi_x(t_0) = \beta_0, \quad -\psi_x(t_1) = \beta_1, \tag{1.120}$$

$$-\dot{\psi}_t = 0, \quad \psi_t(t_0) = \beta_t, \quad -\psi_t(t_1) = \alpha_0, \tag{1.121}$$

$$\max_{u \in \bar{U}} H(x(t),u,\psi_x(t)) + \psi_t(t) = 0, \quad \forall\, t \in \Delta, \tag{1.122}$$

$$H(x(t),u(t),\psi_x(t)) + \psi_t(t) = 0, \quad \text{п.в. на } \Delta. \tag{1.123}$$

Из (1.121) следует, что $\psi_t \equiv -\alpha_0$. Предположим, что $\psi_x(t_0) = 0$. Тогда из уравнения $-\dot{\psi}_x = \psi_x f_x(x,u)$ следует, что $\psi_x \equiv 0$. Отсюда $\beta_0 = \beta_1 = 0$ и $\psi_x f = 0$. Из последнего равенства и условия (1.123) следует, что $\psi_t = 0$. Тогда $\alpha_0 = 0$ и $\beta_t = 0$ в силу (1.121). Мы пришли к противоречию с (1.119). Таким образом, $|\psi_x(t_0)| > 0$ есть эквивалентное условие нормировки.

Итак, окончательная формулировка принципа максимума для траектории $(x(t),u(t) \mid t \in [0,T])$ в задаче (1.118) такова:

существует абсолютно непрерывная на $\Delta = [0,T]$ функция $\psi(t)$ такая, что

$$|\psi(0)| > 0, \tag{1.124}$$

$$-\dot{\psi} = H_x(x(t),u(t),\psi(t)), \quad \text{п.в. на } \Delta, \tag{1.125}$$

$$0 \leqslant \max_{u \in \bar{U}} H(x(t),u,\psi_x(t)) = H(x(t),u(t),\psi_x(t)), \quad \text{п.в. на } \Delta. \tag{1.126}$$

Из этих условий вытекает, что

$$\max_{u \in \bar{U}} H(x(t),u,\psi_x(t)) \equiv const \quad \text{на } \Delta. \tag{1.127}$$

Поэтому неравенство в (1.126) достаточно проверять хотя бы в одной точке $t \in \Delta$.

Последние две задачи, (1.109) и (1.118), являются основными в книге [1], где для них был получен принцип максимума.

1.8 Понтрягинский минимум

Мы получили принцип максимума как необходимое условие стационарности в каждой конечномерной задаче B^θ (нетрудно показать, что он есть эквивалент стационарности в каждой конечномерной задаче B^θ). Это дает представление о принципе максимума как о необходимом условии первого порядка. Но возникает вопрос: для какого типа минимума принцип максимума является необходимым условием? До сих пор мы предполагали, что исследуемая траектория доставляет глобальный минимум в задаче А. Дело в том, что между основной и конечномерной задачами была установлена довольно грубая связь: из абсолютного минимума в основной задаче вытекает абсолютный минимум в каждой конечномерной задаче, а значит, стационарность в каждой конечномерной задаче. Однако, проводя анализ более внимательно, мы могли бы увидеть, к нарушению какого типа минимума приводит отсутствие стационарности хотя бы в одной из конечномерных задач. Ниже, не приводя больше никаких доказательств, мы сформулируем ответ на этот вопрос для задачи A.

Как и условие Вейерштрасса в вариационном исчислении, принцип максимума вытекает, например, из сильного минимума. В литературе часто так и принято квалифицировать его — как необходимое условие первого порядка для сильного минимума. Напомним, что сильный минимум соответствует малым вариациям фазовой переменной, при этом вариации управления могут быть любыми. Однако известные доказательства условия Вейерштрасса с помощью игольчатой вариации позволяют заключить, что интересующий нас тип минимума связан как раз с игольчатыми вариациями управления, или, возможно, с такими вариациями управления, которые принимают не малые значения лишь на множестве малой меры. Если такие вариации добавить к обычным равномерно малым вариациям управления, то получится класс вариаций, минимум в котором А.Я.Дубовицкий и А.А.Милютин предложили назвать *понтрягинским* в честь первооткрывателя принципа максимума Льва Семеновича Понтрягина. (Добавление малых вариаций управления продиктовано тем, что без них класс "игольчатых" вариаций, во-первых, не сравним с классом малых вариаций, который является основным в КВИ, и во-вторых, минимум в классе одних "игольчатых" вариаций не инвариантен относительно различных преобразований задачи.)

Дадим теперь точное определение понтрягинского минимума в канонической задаче A. Как и для понятий слабого и сильного минимума, это удобнее сделать сначала для задачи А на фиксированном отрезке времени $[t_0, t_1]$. Пусть пока для простоты множество $\mathcal{Q}$ (область определения функций задачи) есть все пространство.

Определение 1.1. Будем говорить, что допустимая траектория $\hat{x}(t), \hat{u}(t)$ доставляет *понтрягинский минимум* в задаче А, если не существует последовательности допустимых траекторий $x^k(t), u^k(t)$, $k = 1, 2, \dots$, такой что при $k \to \infty$

$$\begin{gathered} ||x^k - \hat{x}||_C \to 0, \qquad ||u^k - \hat{u}||_1 \to 0, \\ ||u^k - \hat{u}||_\infty \le \mathcal{O}(1), \end{gathered} \tag{1.128}$$

и при этом $\forall\, k \qquad J(x^k, u^k) < J(\hat{x}, \hat{u})$.

Другими словами, нельзя понизить функционал задачи на допустимой последовательности, приближающейся к данной $(\hat{x}, \hat{u})$ в смысле (1.128).

(Если множество управлений U ограничено, то последнее условие в (1.128) выполняется автоматически, и поэтому его можно опустить; т.е. понтрягинский минимум в этом случае есть локальный минимум относительно $\|x\|_C + \|u\|_1$.)

В более привычных терминах приведенное определение эквивалентно следующему.

Определение 1.2. Траектория $(\hat{x}(t), \hat{u}(t))$ доставляет *понтрягинский минимум* в задаче A, если для любой константы N существует такое $\varepsilon > 0$, что для любой допустимой траектории (x, u), удовлетворяющей неравенствам

$$||x - \hat{x}||_C < \varepsilon, \qquad ||u - \hat{u}||_1 < \varepsilon, \qquad ||u - \hat{u}||_\infty \le N, \tag{1.129}$$

выполнено неравенство $J(x, u) \ge J(\hat{x}, \hat{u})$.

Другими словами, для любого N траектория $(\hat{x}, \hat{u})$ доставляет локальный минимум относительно нормы $\|x\|_C + \|u\|_1$ в задаче A с дополнительным ограничением $||u - \hat{u}||_\infty \le N$.

Из этого определения сразу видно, что понтрягинский минимум занимает промежуточное положение между классическими слабым и сильным минимумами.

В случае слабого минимума вместо (1.129) фигурируют неравенства

$$||x - \hat{x}||_C < \varepsilon, \qquad ||u - \hat{u}||_\infty < \varepsilon,$$

которые задают в пространстве (x, u) более узкое множество, чем неравенства (1.129), и поэтому из наличия понтрягинского минимума на траектории $(\hat{x}, \hat{u})$ вытекает наличие слабого минимума.

В случае сильного минимума вместо (1.129) имеется лишь одно неравенство

$$||x - \hat{x}||_C < \varepsilon,$$

которое выделяет в пространстве (x, u) более широкое множество, чем неравенства (1.129), и поэтому из наличия сильного минимума на траектории $(\hat{x}, \hat{u})$ вытекает наличие понтрягинского минимума.

Эти соотношения легко получаются и на языке последовательностей.

Слабый минимум на траектории $(\hat{x}, \hat{u})$ означает, что не существует последовательности допустимых траекторий $x^k(t), u^k(t)$, $k = 1, 2, \ldots$, такой что

$$||x^k - \hat{x}||_C \to 0, \qquad ||u^k - \hat{u}||_\infty \to 0, \tag{1.130}$$

и при этом $\forall\, k \qquad J(x^k, u^k) < J(\hat{x}, \hat{u})$.

Для сильного минимума два условия (1.130) заменяются на одно первое:

$$||x^k - \hat{x}||_C \to 0. \tag{1.131}$$

Сравнивая (1.128), (1.130) и (1.131), опять приходим к тем же соотношениям между этими тремя типами минимума, которые условно можно записать так:

$$\text{сильный} \implies \text{понтрягинский} \implies \text{слабый}.$$

Можно показать, что обе импликации здесь необратимы, т.е. на траектории $(\hat{x}, \hat{u})$ может достигаться слабый минимум, но не быть понтрягинского, и может достигаться понтрягинский минимум, но не быть сильного. (Постройте сами соответствующие примеры!)

В случае, когда отрезок времени в задаче A не фиксирован, определение понтрягинского минимума модифицируется следующим естественным образом. Если пользоваться языком последовательностей, то траектории (x^k, u^k) определены на отрезках $\Delta^k = [t_0^k, t_1^k]$, которые должны стремиться к отрезку $\hat{\Delta} = [\hat{t}_0, \hat{t}_1]$, и все нормы в условии (1.128) надо рассматривать на пересечении $\Delta^k \cap \hat{\Delta}$ (т.е. на общем отрезке определения траекторий (x^k, u^k) и $(\hat{x}, \hat{u})$).

Наконец, если "область определения" задачи не есть все пространство, а задается открытым множеством $\mathcal{Q}$, то последнее условие в (1.128) заменяется на следующее: существует компакт $\Omega \subset \mathcal{Q}$ (зависящий от последовательности), такой что

$$\forall\, k \qquad (t, x^k(t), u^k(t)) \in \Omega \qquad \text{почти всюду на} \quad \Delta^k.$$

Ясно, что если $\mathcal{Q}$ есть все пространство, то это условие равносильно последнему условию в (1.128).

Внимательно прослеживая вышеприведенное доказательство теоремы 12, нетрудно обнаружить, что на самом деле справедливо несколько более сильное утверждение.

Теорема 15. *Если траектория $(\hat{x}, \hat{u})$ доставляет понтрягинский минимум в задаче А, то для нее выполнен принцип максимума Понтрягина.*

Таким образом, принцип максимума Понтрягина есть необходимое условие понтрягинского минимума (а не только сильного, или тем более глобального минимума). Как мы увидим позже, этот факт остается справедливым и для гораздо более общей задачи, чем задача А.

В заключение отметим следующее весьма интересное обстоятельство: понтрягинский минимум, в отличие от слабого и сильного, не является локальным минимумом в смысле какой-либо топологии. Поясним сказанное.

Будем говорить, что последовательность (x^k, u^k) *сходится по понтрягински* к $(\hat{x}, \hat{u})$, если выполнены условия (1.128). (Новизна здесь, конечно, в сходимости компоненты u; относительно x сходимость обычная равномерная.)

Лемма 8. *В пространстве функций (x, u) на данном отрезке Δ не существует топологии, сходимость в которой совпадала бы с понтрягинской сходимостью.*

Как известно, сходимость соответствует некоторой топологии, если оператор замыкания, порожденный этой сходимостью (который к любому множеству $\mathcal{M}$ добавляет всевозможные пределы последовательностей точек этого множества, сходящиеся в данном смысле), обладает тем свойством, что замыкание любого множества замкнуто, т.е. повторное замыкание всегда совпадает с однократным замыканием: $\overline{\overline{\mathcal{M}}} = \overline{\mathcal{M}}$ (см. [10, 11]). Поэтому для доказательства леммы достаточно привести пример множества $\mathcal{M}$, для которого $\overline{\overline{\mathcal{M}}} \neq \overline{\mathcal{M}}$. Мы оставляем это в качестве задачи для заинтересованного читателя.

Несмотря на указанное несколько странное обстоятельство, связанное с понятием понтрягинского минимума, на первый взгляд затрудняющее его исследование традиционными методами анализа, именно понтрягинский минимум оказался очень удобным рабочим инструментом при исследовании различных задач и теоретических вопросов оптимального управления. Понтрягинский минимум обладает наиболее богатой теорией условий как первого так и высших порядков, во многих отношениях более полной и содержательной, чем, скажем, теория слабого минимума классического вариационного исчисления. Это показали исследования последних десятилетий. Одно из объяснений этому состоит в том, что наличие понтрягинского минимума на данной траектории (а также выполнение принципа максимума на ней) сохраняется при различных преобразованиях задачи, тогда как слабый минимум (и соответственно, уравнение Эйлера–Лагранжа) не обладает такой инвариантностью.

Глава 2

Аппарат теории экстремума. Схема Дубовицкого–Милютина

2.1 Накрывание и метрическая регулярность. Теорема Люстерника

1. Теорема Банаха об открытом отображении. Пусть X , Y — банаховы пространства, $A : X \to Y$ — линейный непрерывный оператор. Как известно, непрерывность оператора A эквивалентна его ограниченности. Пусть B_X , B_Y — единичные шары в X и Y соответственно.

Теорема 16 (об открытом отображении). *Пусть $A : X \to Y$ — линейный ограниченный оператор. Тогда существует $a > 0$ такое, что*

$$A(B_X) \supset aB_Y, \tag{2.1}$$

т. е. образ единичного шара в X содержит шар радиуса a в Y (с центром в нуле).

Доказательство — см., например, [10, 11].

Следствие 1 (теорема Банаха об обратном операторе). *Если $A : X \underset{1:1}{\longrightarrow} Y$, то $A^{-1} : Y \to X$ — ограниченный линейный оператор.*

Условие (2.1) называется *свойством накрывания с константой* $a > 0$ для линейного оператора. Таким образом, всякий линейный сюръективный оператор накрывает с некоторой константой $a > 0$.

В силу линейности это свойство можно распространить на любые шары:

$$A(B_X(x, r)) \supset B_Y(Ax, ar), \quad \forall\, x \in X,\ \forall\, r > 0,$$

где $B_X(x, r)$ — шар в X радиуса r с центром в x (проверьте!).

Именно это свойство используется в определении понятия накрывания для нелинейных операторов.

2. Накрывание для нелинейных операторов. Пусть (X, d_X) , (Y, d_Y) — метрические пространства, $F : X \to Y$ — оператор, $B_X(x, r)$ — шар радиуса r с центром в точке x в X , $B_Y(y, r)$ — шар радиуса r с центром в точке y в Y . Пусть $U \subset X$ — открытое множество.

Определение 2.1. Будем говорить, что оператор F *накрывает на множестве* U с константой $a>0$, если для любого $B_X(x,r)\subset U$ выполнено включение

$$F(B_X(x,r))\supset B_Y(F(x),ar). \tag{2.2}$$

Если есть накрывание с константой $a>0$, то есть накрывание и с любой меньшей константой $a'<a$. Супремум всех a, для которого есть накрывание, называют *константой накрывания* F на U.

Определение 2.2. Оператор $S:X\to Y$ назовем *стягивающим* (или *сжимающим*) на U с константой $b>0$, если для любого $B_X(x,r)\subset U$ выполнено включение

$$F(B_X(x,r))\subset B_Y(F(x),br). \tag{2.3}$$

Говорят, что оператор $S:X\to Y$ удовлетворяет условию Липшица на U с константой b, если

$$d_Y(S(x_1),S(x_2))\leqslant bd_X(x_1,x_2)\quad \forall\, x_1,x_2\in U. \tag{2.4}$$

(Очевидно, при этом $b\geq 0$.) Оператор, удовлетворяющий на U условию Липшица с некоторой константой, называют липшицевым на U.

Ясно, что оператор, удовлетворяющий на U условию Липшица с константой b, является стягивающим на U с той же константой. (А верно ли обратное?)

Оказывается, если накрывающий оператор "возмутить" стягивающим с малой константой, то свойство накрывания не нарушится. Это утверждается в следующей теореме, принадлежащей А.А. Милютину и возникшей как обобщение теоремы Люстерника о касательном многообразии (с последней нам еще предстоит познакомиться).

Теорема 17 (о накрывании). *Пусть* (X,d) *— полное метрическое пространство,* $(Y,\|\cdot\|)$ *— нормированное пространство,* $U\subset X$ *— открытое множество.*

Пусть $T:X\to Y$ *накрывает на* U *с константой* $a>0$ *и непрерывен на* U, $S:X\to Y$ *стягивает на* U *с константой* $b>0$. *Пусть* $a>b$.

Тогда оператор

$$F=T+S:X\to Y\qquad (F(x):=T(x)+S(x)\quad \forall\, x\in X)$$

накрывает на U *с константой* $a-b$.

Для доказательства нам понадобится лемма. Пусть $B_X(x_0,R)$ — фиксированный шар радиуса $R>0$ с центром в x_0 в X. Накрывание и стягивание на $B_X(x_0,R)$ определим как и на U. По-прежнему X — полное метрическое, Y — нормированное пространство.

Лемма 9 (о накрывании). *Пусть оператор* $T:X\to Y$ *непрерывен и накрывает на* $B_X(x_0,R)$ *с константой* $a>0$, *а оператор* $S:X\to Y$ *стягивает на* $B_X(x_0,R)$ *с константой* $b>0$, *где* $a>b$. *Тогда для оператора* $F=T+S$ *выполнено включение*

$$F(B_X(x_0,R))\supset B_Y(F(x_0),(a-b)R). \tag{2.5}$$

Доказательство. Без нарушения общности считаем $a = 1$, и тогда $b < 1$. (Действительно, в Y можно ввести новую норму $\|\cdot\|' = \frac{1}{a}\|\cdot\|$, и тогда шар радиуса a станет шаром единичного радиуса.) В обозначениях шаров нижние индексы X и Y будем опускать, а расстояние в пространствах X и Y обозначать одной и той же буквой d.

Обозначим $F(x_0) = y_0$. Возьмем произвольный $\hat y \in B(y_0, (1-b)\rho)$, т.е. $d(\hat y, y_0) \le (1-b)\rho$. Требуется показать, что найдется такой $\hat x \in B(x_0, \rho)$, что $F(\hat x) = \hat y$.

Точку $\hat x$ мы получим в виде предела последовательности $\{x_n\}$, которую сейчас построим с помощью некоторого итерационного процесса. Обозначим для краткости $r = (1-b)\rho$.

Имеем начальную ситуацию

$$T(x_0) + S(x_0) = y_0\,, \tag{2.6}$$

а нам надо справа получить $\hat y$. Перепишем это равенство в виде $T(x_0) = y_0 - S(x_0)$ и воспользуемся 1-накрыванием оператора T. Поскольку

$$d\,(\hat y - S(x_0),\, y_0 - S(x_0)) \;=\; d\,(\hat y,\, y_0) \;\le r,$$

то существует $x_1 \in B(x_0, r)$, такой что $T(x_1) = \hat y - S(x_0)$, т.е.

$$T(x_1) + S(x_0) = \hat y\,. \tag{2.7}$$

Теперь заменим здесь $S(x_0)$ на $S(x_1)$. Так как оператор S стягивает с коэффициентом b на шаре $B(x_0, r)$, то $d(S(x_1), S(x_0)) \le br$, и поэтому

$$T(x_1) + S(x_1) = y_1\,, \tag{2.8}$$

причем $d(\hat y, y_1) \le br$.

Таким образом, от равенства (2.6) для "базовой" точки x_0 мы перешли к равенству (2.8) для новой "базовой" точки x_1, и при этом

$$d(x_0, x_1) \le r, \qquad d(\hat y, y_1) \le br.$$

Теперь уже в равенстве (2.8) будем пытаться заменить y_1 на $\hat y$.
Так как

$$r + br < \; r\,(1 + b + b^2 + \ldots) \;=\; r\,\frac{1}{1-b} \;= \rho,$$

то шар $B(x_1, br)$ содержится в шаре $B(x_0, \rho)$; поэтому для него выполнено 1-накрывание оператора T и $b-$ стягивание оператора S, и тогда по аналогии с предыдущим существует $x_2 \in B(x_1, br)$, такой что

$$T(x_2) + S(x_2) = y_2\,, \qquad \text{где} \qquad d(\hat y, y_2) \le b^2 r.$$

Продолжая этот процесс неограниченно, получим последовательность точек x_n, y_n таких, что

$$F(x_n) = T(x_n) + S(x_n) = y_n\,, \tag{2.9}$$

$$d(x_{n-1}, x_n) \le b^{n-1} r, \qquad d(\hat y, y_n) \le b^n r. \tag{2.10}$$

При этом

$$d(x_0, x_n) + b^n r \;\le\; d(x_0, x_1) + d(x_1, x_2) + \ldots + d(x_{n-1}, x_n) + b^n r \;\le$$

$$\leq\ r + br + \ldots + b^{n-1}r + b^n r\ <\ r\,\frac{1}{1-b}\ = \rho, \tag{2.11}$$

т.е. шар $B(x_n, b^n r)$ содержится в исходном шаре $B(x_0, \rho)$, и поэтому возможен следующий шаг нашего процесса. (Проверьте, что на следующем шаге будут выполнены неравенства, аналогичные (2.10), и тем самым завершите индукцию по n.)

Рассмотрим полученную последовательность x_n. Из первого неравенства (2.10) вытекает, что она фундаментальна, и тогда в силу полноты пространства X она имеет предел. Обозначим его через $\hat{x}$. Из (2.11) следует, что $d(x_0, \hat{x}) \leq \rho$, т.е. $\hat{x} \in B(x_0, \rho)$. Из второго неравенства (2.10) следует, что $y_n \to \hat{y}$, а тогда в силу (2.9) из непрерывности оператора F на исходном шаре получаем $F(\hat{x}) = \hat{y}$, что и требовалось. □

Замечание. В доказательстве этой леммы нам требовалось решить уравнение $T(\hat{x}) + S(\hat{x}) = \hat{y}$, исходя из начального приближения (2.6). Обратим внимание, что фактически мы решали это уравнение методом Ньютона: роль производной нелинейного оператора играл у нас оператор T, а роль нелинейного остатка – оператор S. За счет накрывания T мы "решали" уравнение (2.7) и получали точку x_1, а малый добавок S "сбивал" нас с этого равенства; получалось новое приближение (2.8), уже более точное, чем исходное, и т.д.

Этот абстрактный аналог метода Ньютона впервые был использован Л.А.Люстерником и поэтому мы называем его *люстерниковским итерационным процессом.* Он не совпадает в точности с процессом Ньютона, потому что оператор T, вообще говоря, не взаимно-однозначный, т.е. уравнение (2.7) здесь, в отличие от метода Ньютона, решается не однозначно.

Доказательство теоремы о накрывании получается применением леммы к каждому шару, содержащемуся в U. □

3. Накрывание и метрическая регулярность. Пусть (X,d) и (Y,d) — метрические пространства (чтобы избежать громоздких обозначений, метрики в этих пространствах мы обозначаем одной и той же буквой d, хотя, конечно, они разные), и пусть задан оператор $F: X \to Y$. Через $\mathcal{O}_\varepsilon(x)$ обозначим открытый шар в X радиуса $\varepsilon > 0$ с центром в точке x, а через $B(x,r)$ по-прежнему обозначаем замкнутый шар в X радиуса $r \geqslant 0$ с центром в точке x.

Определение 2.3. Отображение $F: X \to Y$ *метрически регулярно с константой* $k > 0$ на $X \times Y$, если

$$d\big(x, F^{-1}(y)\big) \leqslant k\, d\big(F(x), y\big) \qquad \forall\, x \in X, \quad \forall\, y \in Y\,. \tag{2.12}$$

Утверждение 1. *Накрывание на X с константой $a > 0$ влечет метрическую регулярность на $X \times Y$ с константой $k = \frac{1}{a}$.*

Доказательство. Пусть $F: X \to Y$ накрывает на X с константой $a > 0$. Пусть $x \in X$, $y \in Y$. По условию накрывания для $r = d\big(F(x), y\big)$ имеем:

$$F\Big(B(x, \frac{r}{a})\Big)\ \supset\ B\big(F(x), r\big).$$

Так как $y \in B\big(F(x), r\big)$, то найдется $x_y \in B\big(x, \frac{r}{a}\big)$ такой, что $F(x_y) = y$. Тогда

$$d(x, x_y) \leqslant \frac{r}{a} = \frac{1}{a}\, d\big(F(x), y\big).$$

Поскольку $x_y \in F^{-1}(y)$, то

$$d\big(x, F^{-1}(y)\big) \leqslant d(x, x_y),$$

и поэтому

$$d\big(x, F^{-1}(y)\big) \leqslant \frac{1}{a}\, d\big(F(x), y\big).$$

Метрическая регулярность означает, что расстояние от точки x до уровня y функции F оценивается первой степенью расстояния от образа $F(x)$ до y .

Часто эта оценка применяется для $y = 0$, то есть для расстояния до нулевого уровня оператора. Наличие оценки (2.12) предполагает непустоту множества $F^{-1}(y)$ — полного прообраза точки y . Если $F^{-1}(y) = \varnothing$, то по определению $d\big(x, F^{-1}(y)\big) = +\infty$ (расстояние от точки до пустого множества равно $+\infty$).

У понятий "накрывание" и "метрическая регулярность" имеется "локальный вариант". Пусть $x_0 \in X$ — фиксированная точка, $y_0 = F(x_0)$.

Определение 2.4. *F накрывает с константой $a > 0$ в окрестности точки x_0* , если существует окрестность U точки x_0 , в которой F накрывает с константой a , т. е.

$$F(B(x, r)) \supset B(F(x), ar) \quad \forall\, B(x, r) \subset U.$$

Определение 2.5. *F метрически регулярно с константой $k > 0$ в окрестности точки x_0* , если существуют окрестность U точки x_0 в X и окрестность V точки $y_0 = F(x_0)$ в $Y,$ такие, что

$$d(x, F^{-1}(y)) \leqslant k d(F(x), y) \quad \forall\, x \in U,\ \forall\, y \in V.$$

Замечание. Правильнее было бы сказать "в окрестности точки (x_0, y_0) в $X \times Y$" .

Теорема 18. *Если отображение F накрывает в окрестности точки x_0 с константой $a > 0,$ то оно метрически регулярно с константой $k = \frac{1}{a}$ для некоторых окрестностей точек x_0 и $y_0 = F(x_0).$*

Для отображения, непрерывного в точке $x_0,$ верно и обратное: Если отображение F метрически регулярно с константой $k > 0$ для некоторых окрестностей точек x_0 и $y_0 = F(x_0),$ то в некоторой окрестности точки x_0 оно накрывает с любой константой $a < \frac{1}{k}$.

Доказательство. ($\Longrightarrow$) Без нарушения общности можно считать $a = 1$ (заменив в пространстве Y метрику $d(\cdot,\cdot)$ на метрику $d(\cdot,\cdot)/a$). Тогда по условию F накрывает с константой 1 в некоторой $\varepsilon-$ окрестности точки x_0. Положим $\delta = \varepsilon/3$ и покажем, что для $\delta-$ окрестностей точек x_0 и $y_0 = F(x_0)$ выполнена метрическая регулярность с константой 1 .

Возьмем произвольные точки $x \in B(x_0, \delta),$ $y' \in B(y_0, \delta).$ Обозначим $F(x) = y,$ $d(y', y) = r.$ Требуется показать, что $d(x, F^{-1}(y')) \le r$. Мы покажем, что более того,

$$\exists\, x' \in B(x, r) \qquad \text{такой, что} \qquad F(x') = y'\,. \tag{2.13}$$

Возможны два случая: а) $r \geq 2\delta$ (y и y' "далеки" друг от друга),
б) $r < 2\delta$ (y и y' "близки").

В случае а) воспользуемся тем, что в силу 1-накрывания оператора F образ шара $B(x_0, \delta)$ содержит шар $B(y_0, \delta)$, и поэтому существует $x' \in B(x_0, \delta)$ такой, что $F(x') = y'$. При этом

$$d(x', x) \leq \ d(x', x_0) + d(x_0, x) \ \leq \ \delta + \delta \ \leq r,$$

и тем самым (2.13) установлено.

В случае б) шар $B(x, r)$ содержится в $\varepsilon-$ окрестности точки x_0 (ибо по неравенству треугольника любая его точка x' отстоит от x_0 не более, чем на $r + d(x, x_0) \leq r + \delta < 3\delta = \varepsilon$), и тогда в силу 1-накрывания

$$F(B(x, r)) \ \supset \ B(y, r). \tag{2.14}$$

Но $y' \in B(y, r)$ (см. определение r), поэтому из (2.14) следует (2.13), ч.т.д.

($\Longleftarrow$) Теперь без нарушения общности мы можем считать $k = 1$. Итак, пусть F непрерывно в x_0 и при некоторых $\delta > 0$, $\varepsilon > 0$ метрически регулярно с константой 1 для окрестностей $\mathcal{O}_\delta(x_0)$ и $\mathcal{O}_\varepsilon(y_0)$ точек x_0 и $y_0 = F(x_0)$. Уменьшим, если необходимо, δ так, чтобы было

$$0 < \delta < \varepsilon/3 \qquad \text{и} \qquad F(\mathcal{O}_\delta(x_0)) \ \subset \ \mathcal{O}_{\varepsilon/3}(y_0). \tag{2.15}$$

Покажем, что F накрывает на $\mathcal{O}_\delta(x_0)$ с любой константой $a < 1$.

Рассмотрим любой шар $B(x, r) \subset \mathcal{O}_\delta(x_0)$. Очевидно, радиус такого шара $r \leq 2\delta$ (т.к. для любой его точки x' выполнено $d(x', x) \leq d(x', x_0) + d(x_0, x) < 2\delta$).

Обозначим $F(x) = y$ и возьмем любое $r' < r$. Достаточно показать, что

$$F(B(x, r)) \ \supset \ B(y, r'), \tag{2.16}$$

отсюда $a-$ накрывание F очевидно вытекает (при любом $a < 1$).

Возьмем любую точку $y' \in B(y, r')$. Для нее в силу (2.15)

$$d(y_0, y') \leq \ d(y_0, y) + r' \ < \ \frac{\varepsilon}{3} + 2\delta \ < \varepsilon,$$

поэтому $y' \in \mathcal{O}_\varepsilon(y_0)$. Так как $x \in \mathcal{O}_\delta(x_0)$, то для точек x, y' в силу метрической регулярности имеем

$$d(x, \, F^{-1}(y')) \ \leq \ d(y, y') \ \leq r' < r,$$

поэтому существует $x' \in F^{-1}(y')$ такой, что $d(x, x') < r$.

Таким образом, $x' \in B(x, r)$ и $F(x') = y'$, и тем самым (2.16) установлено. Теорема доказана.

4. Дифференцируемость по Фреше и строгая дифференцируемость оператора. В главе 1 мы уже определяли понятия дифференцируемости по Фреше и непрерывной дифференцируемости для отображений банаховых пространств. Напомним их. Пусть X , Y — банаховы пространства, U — окрестность точки $x_0 \in X$, $g : U \to Y$ — оператор (отображение).

Определение 2.6. Оператор g *дифференцируем по Фреше* в точке x_0, если существует ограниченный линейный оператор $A: X \to Y$, такой что

$$g(x_0 + h) = g(x_0) + Ah + r(x_0, h), \qquad \text{где} \quad \|r(x_0, h)\| = o(\|h\|).$$

Оператор A называется *производной Фреше* оператора g в точке x_0. Принято обозначать

$$A = g'(x_0).$$

В частности, при $Y = \mathbb{R}^1$ мы получаем определение функционала, дифференцируемого по Фреше в точке x_0.

Оператор g называют *непрерывно дифференцируемым* по Фреше в точке x_0, если он имеет производную Фреше $g'(x)$ в окрестности точки x_0 и при этом

$$\|g'(x) - g'(x_0)\| \to 0 \quad \text{при } \|x - x_0\| \to 0\,.$$

Оператор g называют *строго дифференцируемым* в точке x_0, если существует ограниченный линейный оператор $A: X \to Y$ такой, что $\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta > 0$ такое, что для любых x_1, x_2, удовлетворяющих неравенствам $\|x_1 - x_0\| < \delta$, $\|x_2 - x_0\| < \delta$ выполнено неравенство

$$\|g(x_2) - g(x_1) - A(x_2 - x_1)\| \leqslant \varepsilon \|x_2 - x_1\|. \tag{2.17}$$

Строгая дифференцируемость в точке сильнее, чем дифференцируемость по Фреше в этой точке. Действительно, на языке $\varepsilon - \delta$ дифференцируемость по Фреше можно сформулировать так: $\forall\, \varepsilon > 0\; \exists\, \delta > 0$ такое, что из условия $\|x - x_0\| < \delta$ вытекает, что

$$\|g(x) - g(x_0) - A(x - x_0)\| \leqslant \varepsilon \|x - x_0\|.$$

(По сравнению с (2.17) здесь одна из точек x_1, x_2 совпадает с данной точкой x_0.) Отсюда ясно, что строгая дифференцируемость влечет дифференцируемость по Фреше, и что в определении строгой дифференцируемости $A = g'(x_0)$.

Покажем, что из непрерывной дифференцируемости в точке вытекает строгая дифференцируемость в этой точке. Для этого нам понадобится известная теорема о среднем для операторов.

Теорема 19 (о среднем). *Пусть X, Y — нормированные пространства, $U \subset X$ — открытое множество, $[a, b] \subset U$ — отрезок, $f: U \to Y$ — оператор, дифференцируемый по Фреше в каждой точке $x \in [a, b]$. Тогда*

$$\|f(b) - f(a)\| \leqslant \sup_{x \in [a,b]} \|f'(x)\|\, \|b - a\|.$$

Замечание. Эта теорема остается справедливой, если в каждой точке отрезка $[a, b]$ оператор f дифференцируем не по Фреше, а лишь по Гато (т. е. в более слабом смысле). Подробности см. в [16], с. 148, там же приведено и доказательство.

Теперь покажем, что непрерывная дифференцируемость в точке сильнее, чем строгая. Пусть $g(x)$ непрерывно дифференцируем по Фреше в точке x_0. Рассмотрим оператор $\varphi(x) = g(x) - g'(x_0)x$. Для него при x близком к x_0 имеем: $\varphi'(x) = g'(x) - g'(x_0)$, и следовательно, $\|\varphi'(x)\| \to 0$ при $\|x - x_0\| \to 0$. Тогда

$$\|g(x_2) - g(x_1) - g'(x_0)(x_2 - x_1)\| = \|\varphi(x_2) - \varphi(x_1)\| \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{x\in[x_1,x_2]} \|\varphi'(x)\|\,\|x_2-x_1\|. \tag{2.18}$$

Поскольку $\sup_{x\in[x_1,x_2]}\|\varphi'(x)\| \to 0$ при $\|x_1-x_0\|+\|x_2-x_0\| \to 0$, то g строго дифференцируем в точке x_0. Итак, доказана

Теорема 20. *Непрерывная дифференцируемость по Фреше в точке влечет строгую дифференцируемость в этой точке.*

5. Накрывание и метрическая регулярность для строго дифференцируемого оператора. Пусть $g: U\to Y$ строго дифференцируем в точке $x_0\in U$. Представим его в виде

$$g(x) = g(x_0+(x-x_0)) = g(x_0)+g'(x_0)(x-x_0)+S(x), \tag{2.19}$$

где

$$S(x) = g(x)-g(x_0)-g'(x_0)(x-x_0). \tag{2.20}$$

Для $x_1, x_2\in U$ имеем

$$S(x_2)-S(x_1) = g(x_2)-g(x_1)-g'(x_0)(x_2-x_1).$$

Из определения строгой дифференцируемости оператора g в точке x_0 вытекает, что $\forall\,\varepsilon>0\ \exists\,\delta>0$, такое, что

$$\|S(x_2)-S(x_1)\| \leqslant \varepsilon\|x_2-x_1\| \qquad \forall x_1,x_2\in B(x_0,\delta),$$

т. е. оператор S удовлетворяет условию Липшица (и, следовательно, является стягивающим) с константой $\varepsilon>0$ на шаре $B(x_0,\delta)$. При этом ε можно сделать сколь угодно малым за счет выбора достаточно малого δ.

Теперь мы легко докажем следующий критерий накрывания в окрестности точки x_0 для нелинейного оператора $g: Y\to Y$.

Теорема 21 (достаточное условие для локального накрывания). *Пусть оператор g строго дифференцируем в точке x_0 и пусть $g'(x_0)X=Y$ (выполнено условие Люстерника). Тогда существуют $a>0$ и окрестность точки x_0 такие, что оператор g накрывает с константой a в этой окрестности (а значит g метрически регулярен в окрестности точки x_0 с константой $1/a$).*

Доказательство. Имеем $g(x)=T(x)+S(x),$ где $T(x)=g(x_0)+g'(x_0)(x-x_0)$, а $S(x)$ определен формулой (2.20). Поскольку $g'(x_0)X=Y$, то оператор T накрывает на X с некоторой положительной константой $a_0>0$. Как было показано выше, оператор $S(x)$ стягивает на $B(x_0,\delta)$ с константой $\varepsilon>0,$ причем ε можно выбрать сколь угодно малым за счет выбора достаточно малого $\delta>0.$ Пусть $a_0-\varepsilon>0.$ По теореме Милютина о накрывании оператор $g=T+S$ накрывает с константой $a_0-\varepsilon$ в окрестности точки x_0. □

Замечание. Из доказательства видно, что годится любое $a<a_0$, где a_0 — константа накрывания для $g'(x_0)$.

6. Оценка расстояния до нулевого уровня нелинейного оператора. Пусть X , Y — банаховы пространства, $U \subset X$ — открытое множество, $g : U \to Y$ — оператор,

$$M = \{x \in U \mid g(x) = 0\} = g^{-1}(0)$$

— нулевой уровень этого оператора.

Теорема 22 (о поправке). *Пусть $x_0 \in U$ такова, что $g(x_0) = 0$ (т. е. $x_0 \in M$), g строго дифференцируем в точке x_0 и $g'(x_0)X = Y$. Тогда существуют окрестность $\mathcal{O}(x_0)$ точки x_0 и $k > 0$ такие, что $\forall\, x \in \mathcal{O}(x_0)$ $\exists\, \bar{x} \in X$ такой, что $g(x + \bar{x}) = 0$; $\|\bar{x}\| \leqslant k\|g(x)\|$, и, следовательно, $d(x, M) \leqslant k\|g(x)\|$.*

Доказательство. По условию g метрически регулярен в некоторой окрестности $\mathcal{O}(x_0)$ точки x_0 . Следовательно, существует $k_0 > 0$ такое, что

$$d(x, M) \leqslant k_0\|g(x)\| \qquad \forall x \in \mathcal{O}(x_0) \tag{2.21}$$

(в определении метрической регулярности следует положить $y = 0$). Возьмем любое $k > k_0$ и покажем, что с таким k требуемая поправка существует.

Если $g(x) = 0$, то полагаем $\bar{x} = 0$, и все доказано. Поэтому достаточно рассмотреть случай $\|g(x)\| > 0$.

Из (2.21) и определения расстояния до множества следует, что существует $x_1 \in M$ такой, что $\|x_1 - x\| \leqslant k\|g(x)\|$, и тогда достаточно положить $\bar{x} = x_1 - x$. □

7. Теорема Люстерника о касательном подпространстве. Пусть X — банахово пространство, $M \subset X$ — множество, $x_0 \in \overline{M}$ — точка, $\overline{M}$ — замыкание множества M .

Определение 2.7. Вектор $\bar{x}$ называется (односторонним) *касательным* к M в точке x_0 , если $d(x_0 + \varepsilon\bar{x},\, M) = o(\varepsilon)$ при $\eta \to 0+$.

Обозначим через $T_{x_0}(M)$ множество всех касательных векторов в точке x_0 .

Напомним, что $K \subset X$ — *конус*, если из условий $x \in K$, $\lambda > 0$ следует, что $\lambda x \in K$. Конус K является выпуклым тогда и только тогда, когда из условий $x, y \in K$ следует, что $x + y \in K$. (Покажите).

Если $\bar{x} \in T_{x_0}(M)$ и $\lambda > 0$, то очевидно $\lambda\bar{x} \in T_{x_0}(M)$. Следовательно, $T_{x_0}(M)$ — конус (с вершиной в нуле), вообще говоря, невыпуклый.

Примеры. 1^0. Если $x_0 \in \operatorname{int} M$, то $T_{x_0}(M) = X$.

2^0. Пусть $M = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x \geq 0\}$. Тогда касательный конус в нуле есть M .

3^0. Пусть $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leqslant 1\}$. Касательный конус в точке $(1, 0)$ есть полуплоскость $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \leqslant 0\}$

4^0. Пусть $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$. Касательный конус в точке $(1, 0)$ есть подпространство $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 0\}$.

Теорема 23 (Л. А. Люстерник). *Пусть X , Y — банаховы, $U \subset X$ — открытое множество, $g : U \to Y$ — оператор, $x_0 \in U$ — точка, $g(x_0) = 0$. Пусть*

$$M = \{x \in U \mid g(x) = 0\}.$$

Пусть оператор g *строго дифференцируем в точке* x_0 *и* $g'(x_0)X = Y$ *(условие Люстерника). Тогда*

$$T_{x_0}(M) = \{\bar{x} \in X \mid g'(x_0)\bar{x} = 0\},$$

т. е. касательный конус к множеству нулей оператора есть подпространство, совпадающее с ядром его производной.

Предложение 5. *Независимо от выполнения условия Люстерника имеет место включение* $T_{x_0}(M) \subset Ker\, g'(x_0)$.

Доказательство. Пусть $\bar{x} \in T_{x_0}(M)$. Тогда существуют $\varepsilon_0 > 0$ и функция $\tilde{x}(\varepsilon) : (0, \varepsilon_0) \to X$ такие, что

$$g(x_0 + \varepsilon\bar{x} + \tilde{x}(\varepsilon)) = 0 \qquad \forall \varepsilon \in (0, \varepsilon_0), \qquad \|\tilde{x}(\varepsilon)\| = o(\varepsilon).$$

Пользуясь разложением g в точке x_0 , имеем

$$g(x_0) + g'(x_0)(\varepsilon\bar{x} + \tilde{x}(\varepsilon)) + r(\varepsilon) = 0,$$

где $\|r(\varepsilon)\| = o(\varepsilon)$. Но $g(x_0) = 0$, следовательно, $g'(x_0)(\varepsilon\bar{x}) + o(\varepsilon) = 0$. Деля это равенство на ε и переходя к пределу по $\varepsilon \to +0$, получаем, что $g'(x_0)\bar{x} = 0$, то есть $\bar{x} \in Ker\, g'(x_0)$. □

Доказательство теоремы Люстерника. Пусть выполнены условия теоремы. Требуется установить включение $Ker\, g'(x_0) \subset T_{x_0}(M)$. Пусть $g'(x_0)\bar{x} = 0$. Тогда

$$g(x_0 + \varepsilon\bar{x}) = g(x_0) + g'(x_0)\varepsilon\bar{x} + r(\varepsilon) = r(\varepsilon), \quad \text{где } \|r(\varepsilon)\| = o(\varepsilon) \ .$$

По теореме о поправке $d(x_0 + \varepsilon\bar{x}, M) \leqslant k\,\|r(\varepsilon)\| = o(\varepsilon)$. Следовательно, $\bar{x} \in T_{x_0}(M)$. □

Отметим, что понятия "накрывание", "метрическая регулярность" и соответствующие теоремы возникли из анализа доказательства теоремы Люстерника и так или иначе были с ней связаны.

2.2 Отделимость выпуклых множеств

1. Теорема отделимости Пусть X — банахово пространство, $x_1, x_2 \in X$. Через $[x_1, x_2]$ мы обозначаем отрезок в X с концами x_1 , x_2 , т. е. множество точек, представимых в виде $x = \alpha x_1 + \beta x_2$, где $\alpha \geqslant 0$, $\beta \geqslant 0$, $\alpha + \beta = 1$.

Напомним, что множество $M \subset X$ называется *выпуклым*, если вместе с каждыми двумя точками оно содержит соединяющий их отрезок.

Через X^* мы обозначаем сопряженное пространство к X , состоящее из всех линейных непрерывных функционалов $x^* : X \to \mathbb{R}$. По определению

$$\|x^*\| = \sup_{\|x\| \leqslant 1} \langle x^*, x \rangle$$

— норма в X^*. С этой нормой пространство X^* является банаховым.

Пусть A , B — два множества в X .

Определение 2.8. Функционал $x^* \in X^*$, $x^* \neq 0$ *разделяет* A и B , если

$$\sup_{x \in A} \langle x^*, x \rangle \leqslant \inf_{x \in B} \langle x^*, x \rangle \tag{2.22}$$

Пусть c — число, заключенное между левой и правой частями неравенства (2.22). Тогда гиперплоскость $\{x \mid \langle x^*, x\rangle = c\}$ *разделяет* A и B (или *отделяет* A и B друг от друга) в том смысле, что A лежит в полупространстве $\{x \mid \langle x^*, x\rangle \leqslant c\}$, а B лежит в полупространстве $\{x \mid \langle x^*, x\rangle \geqslant c\}$.

Следующая теорема представляет собой ключевой абстрактный факт, на котором базируется вся современная теория необходимых условий экстремума.

Теорема 24 (об отделимости). *Пусть A — выпуклое открытое множество, B — выпуклое множество. Пусть $A \cap B = \varnothing$. Тогда существует ненулевой линейный непрерывный функционал, разделяющий A и B .*

Это теорема Хана–Банаха "в геометрической форме". Ее доказательство имеется, например, в учебнике [11].

Пусть $M \subset X$ — множество, $x^* \in X^*$ — функционал.

Определение 2.9. Функционал x^* называется *опорным* к множеству M , если

$$\inf x^*(M) \;=\; \inf_{x\in M} \langle x^*, x\rangle > -\infty.$$

Это означает, что $M \subset \{x \mid \langle x, x\rangle \geqslant a\}$ при некотором a . Множество всех опорных к M обозначим через M^*. Покажите, что M^* — выпуклый конус.

Упражнения.

1. Покажите, что M^* — выпуклый конус.

2. Покажите, что если K — конус, то

$$x^* \in K^* \Leftrightarrow \langle x^*, x\rangle \geqslant 0 \qquad \forall\, x \in K.$$

Конус K^* называют *сопряженным* к конусу K .

3. Докажите, что если конус K открыт, то ненулевой опорный функционал положителен на любом $x \in K$.

4. Докажите, что если одно из множеств в теореме отделимости есть конус, то константу c в определении отделимости можно выбрать равной нулю, и при этом x^* или $-x^*$ оказывается элементом сопряженного конуса.

5. Пусть $L \subset X$ – подпространство. Докажите, что всякий функционал x^* , опорный к L , "исчезает"на L , т.е. $\langle x^*, x\rangle = 0 \;\; \forall\, x \in L$. Множество функционалов, удовлетворяющих этому условию, обозначается $L^\perp$ и называется *аннулятором* подпространства L . (Аналогично определяется аннулятор произвольного множества). Итак, для подпространства сопряженный конус совпадает с аннулятором.

6. Пусть A и B два множества в X . Покажите, что их можно отделить в том и только в том случае, когда существуют ненулевые функционалы x^* и y^* такие, что

$$x^* \in A^*, \quad y^* \in B^*, \quad x^* + y^* = 0, \quad \inf x^*(A) + \inf x^*(B) \geqslant 0\,.$$

Эквивалентная формулировка понятия отделимости, содержащаяся в последнем упражнении, позволяет обобщить теорему отделимости на случай конечного числа множеств. Это обобщение рассматривается в следующем пункте, сначала для конусов.

2. Теорема Дубовицкого – Милютина об отделимости конечного числа выпуклых множеств.

Теорема 25 (Дубовицкийй—Милютин). *Пусть* $\Omega_1, \ldots, \Omega_k, \Omega$ *– непустые выпуклые конусы в* X *, причем* $\Omega_1, \ldots, \Omega_k$ *открыты. Тогда* $\Omega_1 \cap \ldots \cap \Omega_k \cap \Omega = \varnothing$ *в том и только в том случае, когда существуют линейные функционалы*

$$x_1^* \in \Omega_1^*, \quad \ldots, \quad x_k^* \in \Omega_k^*, \quad x^* \in \Omega^*, \tag{2.23}$$

не все равные нулю и такие, что

$$x_1^* + \ldots + x_k^* + x^* = 0\,. \tag{2.24}$$

Условие (2.24) Дубовицкий и Милютин назвали *уравнением Эйлера* для системы конусов $\Omega_1, \ldots, \Omega_k, \Omega$. Хотя название может показаться странным, оно объясняется тем обстоятельством, что все необходимые условия первого порядка локального минимума в различных задачах на условный экстремум, в том числе и уравнение Эйлера–Лагранжа в задачах вариационного исчисления, могут быть получены с помощью этого (весьма примитивного, на первый взгляд) равенства. Соответствующая процедура называется схемой (или методом) Дубовицкого–Милютина. С ней нам предстоит подробно познакомиться.

Для доказательства теоремы Дубовицкого–Милютина нам понадобится следующий простой факт. Пусть $X_1, X_2, \ldots, X_n$ — банаховы пространства, $\widehat{X} = X_1 \times \ldots \times X_n$ — их произведение. Тогда $\hat{x}^* \in \widehat{X}^* \Leftrightarrow \exists\, x_k^* \in X_k^*$ такие, что для любого $\hat{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \widehat{X}$ имеем

$$(\hat{x}^*, \hat{x}) = \langle x_1^*, x_1\rangle + \ldots + \langle x_n^*, x_n\rangle \qquad \text{(покажите это).}$$

Доказательство теоремы 25. *Необходимость.* Пусть $\Omega_1 \cap \ldots \cap \Omega_k \cap \Omega = \varnothing$. В произведении $\hat{X} = \underbrace{X \times \ldots \times X}_{k \text{ раз}} = X^k$ рассмотрим два конуса:

$$K_0 = \Omega_1 \times \ldots \times \Omega_k\,,$$

$$K = \{\hat{x} = (x_1, \ldots, x_k) \mid x_1 = \ldots = x_k = x \in \Omega\}.$$

Таким образом, K есть "диагональ" в произведении $\underbrace{\Omega \times \ldots \times \Omega}_{k \text{ раз}} = \Omega^k$.

Покажем, что

$$K_0 \cap K = \varnothing. \tag{2.25}$$

Пусть это не так, и пусть $\hat{x} \in K_0 \cap K$. Поскольку $\hat{x} \in K_0$, то $\hat{x} = (x_1, \ldots, x_k)$, где $x_1 \in \Omega_1, \ldots, x_k \in \Omega_k$. Поскольку $\hat{x} \in K$, то $x_1 = \ldots = x_k = x \in \Omega$. Таким образом, $x \in \Omega_1 \cap \ldots \cap \Omega_k \cap \Omega$, что противоречит условию непересечения конусов.

Оба конуса K_0 и K выпуклы, причем K_0 открыт. Из условия (2.25) по теореме отделимости вытекает существование $\hat{x}^* \in (X^k)^*$ такого, что

$$\langle \hat{x}^*, K_0\rangle \geq 0, \quad \langle \hat{x}^*, K\rangle \leq 0\,,$$

и при этом $\hat{x}^* \neq 0$. Но $\hat{x}^* = (x_1^*, \ldots, x_k^*)$, где $x_i^* \in X^*$, $i = 1, \ldots, k$, а условие $\langle x^*, K_0\rangle \geq 0$ означает, что $\langle x_1^*, x_1\rangle + \ldots + \langle x_k^*, x_k\rangle \geq 0$ для $x_1 \in \Omega_1, \ldots, x_k \in \Omega_k$.

Отсюда легко следует (покажите это), что $x_1^* \in \Omega_1^*, \ldots, x_k^* \in \Omega_k^*$. При этом не все функционалы $x_1^*, \ldots, x_k^*$ равны нулю, поскольку $\hat{x}^* \neq 0$.

Далее, условие $\langle \hat{x}^*, K \rangle \leq 0$ означает, что $\langle x_1^* + \ldots + x_k^*, x \rangle \leq 0 \; \forall x \in \Omega$. Положим $x^* = -(x_1^* + \ldots + x_k^*)$. Тогда $x^* \in \Omega^*$ и $x_1^* + \ldots + x_k^* + x^* = 0$.

Достаточность. Пусть существует ненулевой набор функционалов $x_1^*, \ldots, x_k^*, x^*$, удовлетворяющий условиям (2.23) и (2.24). Пусть однако конусы $\Omega_1, \ldots, \Omega_k, \Omega$ пересекаются, и пусть $\tilde{x}$ — их общий элемент. Среди функционалов $x_1^*, \ldots, x_k^*$ имеется хотя бы один ненулевой $x_{i_0}^*$. Для него $\langle x_{i_0}^*, \tilde{x} \rangle > 0$, поскольку $\tilde{x} \in \operatorname{int} \Omega_{i_0}$. Для остальных x_i^* имеем: $\langle x_i^*, \tilde{x} \rangle \geq 0$. Кроме того, $\langle x^*, \tilde{x} \rangle \geq 0$. Следовательно $\langle \sum_{i=1}^k x_i^* + x^*, \tilde{x} \rangle > 0$, что противоречит условию (2.24). □

Трудно удержаться от того, чтобы не привести аналог (обобщение) этой теоремы для конечного числа выпуклых множеств, хотя это обобщение нам не понадобится.

Теорема 26 (Дубовицкий - Милютин). *Пусть $M_1, \ldots, M_k, M$ - непустые выпуклые множества в банаховом пространстве X , причем $M_1, \ldots, M_k$ - открыты. Тогда условие*

$$M_1 \cap \ldots \cap M_k \cap M = \varnothing$$

равносильно существованию ненулевого набора функционалов $(x_1^*, \ldots, x_k^*, x^*)$ из X^* такого, что

$$x_1^* + \ldots + x_k^* + x^* = 0\,, \tag{2.26}$$

$$\inf\langle x_1^*, M_1 \rangle + \ldots + \inf\langle x_k^*, M_k \rangle + \inf\langle x^*, M \rangle \geq 0\,. \tag{2.27}$$

Эту теорему также несложно доказать, воспользовавшись теоремой отделимости. Для этого следует в пространстве X^k рассмотреть множество A элементов вида $\tilde{x} = (x_1 - x, \ldots, x_k - x)$, где $x_1 \in M_1, \ldots, x_k \in M_k,\ x \in M$. Из условия непересечения множеств $M_1, \ldots, M_k$ и M вытекает, что A не содержит нуля. Кроме того, A открыто и выпукло. Следовательно, найдется функционал $\tilde{x}^* = (x_1^*, \ldots, x_k^*)$, отделяющий A от нуля: $\langle x^*, \tilde{x} \rangle > 0 \quad \forall \tilde{x} \in A,$ то есть

$$\langle x_1^*, x_1 \rangle + \ldots + \langle x_k^*, x_k \rangle + \langle -x_1^* - \ldots - x_k^*, x \rangle > 0$$

для всех $x_1 \in M_1, \ldots, x_k \in M_k,\ x \in M$. Положим $x^* = -x_1^* - \ldots - x_k^*.$ Покажите, что набор $(x_1^*, \ldots, x_k^*, x^*)$ ненулевой и удовлетворяет условиям (2.26),(2.27). Доведите доказательство до конца. □

3. Лемма о нетривиальности аннулятора. Пусть $L \subset X$ линейное многообразие. Множество

$$L^\perp = \{x^* \in X^* \mid \langle x^*, x \rangle = 0 \quad \forall x \in L\}$$

назовем *аннулятором* многообразия L. Ясно, что любой $x^* \in L^\perp$ является опорным к L , но верно и обратное (покажите!). Таким образом, $L^\perp = L^*$. Очевидно, $L^\perp \subset X^*$ — подпространство, т.е. замкнутое линейное многообразие.

Лемма 10. *Пусть $L \subset X$ — подпространство, не совпадающее с X. Тогда $L^\perp$ содержит ненулевой элемент.*

Доказательство. ([16], с. 127) Пусть $x \in X \setminus L$. Тогда $B(x,\varepsilon) \subset X \setminus L$ при некотором $\varepsilon > 0$. Отделим $B(x,\varepsilon)$ от L ненулевым функционалом. Тогда $x^* \in L^{\perp}$, $x^* \neq 0$ (поясните почему!).

Отметим, что предположение о замкнутости L здесь существенно. (Покажите.)

4. Лемма о замкнутости образа.

Лемма 11. *Пусть X, Y, Z — банаховы пространства, $A : X \to Y$, $B : X \to Z$ — линейные непрерывные операторы. Пусть $AX = Y$ и множество $B(\operatorname{Ker} A)$ (образ ядра оператора A при отображении оператором B) замкнуто в Z. Тогда "составной" оператор $T : X \to Y \times Z$, при котором $x \mapsto (Ax, Bx)$, имеет замкнутый образ.*

Доказательство. Пусть последовательность $\{x_n\}$ в X такова, что

$$A\,x_n = y_n, \qquad B\,x_n = z_n, \qquad (y_n, z_n) \to (y_0, z_0)\,.$$

Требуется показать, что $\exists\, x \in X$ такой, что $Ax = y_0$, $Bx = z_0$.

Из условия $AX = Y$ следует, что существует $x_0 \in X$ такой, что $Ax_0 = y_0$. Обозначив $\delta x_n = x_n - x_0$, получим

$$A\,\delta x_n = y_n - y_0 \to 0, \qquad B\,\delta x_n = z_n - Bx_0 \to z_0 - Bx_0\,.$$

Положим $z_0 - Bx_0 = z_0'$. Таким образом, мы пришли к ситуации, когда

$$A\,\delta x_n \to 0\,, \qquad B\,\delta x_n \to z_0'$$

(т.е, свели все к случаю $y_0 = 0$), и нам надо показать что найдется $x' \in X$ такой, что $Ax' = 0$, $Bx' = z_0'$ (тогда $A(x' + x_0) = y_0$ и $B(x' + x_0) = z_0$).

Поскольку A действует "на", из теоремы Банаха об открытом отображении следует, что существует последовательность $\bar{x}_n \to 0$ такая, что $A\delta x_n = A\bar{x}_n$, т.е. $A(\delta x_n - \bar{x}_n) = 0$. При этом $B(\delta x_n - \bar{x}_n) \to z_0'$ (стремится к той же точке z_0'). Таким образом, последовательность $x_n' = \delta x_n - \bar{x}_n \in \operatorname{Ker} A$, и на ней $Bx_n' \to z_0'$. Но по условию оператор B на подпространстве $\operatorname{Ker} A$ имеет замкнутый образ, следовательно, существует $x' \in \operatorname{Ker} A$ такой, что $Bx' = z_0'$, что и требовалось. Лемма доказана. □

Ясно, что в этой лемме вместо условия $AX = Y$ можно предположить, что образ $Y_1 := AX$ замкнут в Y. Тогда $A : X \to Y_1$ и, следовательно, образ $T = (A, B)$ снова замкнут.

Обычно в оптимальном управлении используется следующее утверждение, вытекающее из леммы о замкнутости образа.

Следствие 2. *Пусть $A : X \to Y$ — линейный оператор "на", а $B : X \to Z$ — конечномерный линейный оператор $(dim\, Z < \infty)$. Тогда оператор $T(x) = (Ax, Bx)$ имеет замкнутый образ в $Y \times Z$.*

Доказательство вытекает из того обстоятельства, что здесь подпространство $B(\operatorname{Ker} A)$ конечномерно и поэтому замкнуто.

5. Лемма об аннуляторе ядра линейного оператора

Лемма 12. *Пусть* $A : X \to Y$ *— линейный оператор "на". Тогда*

$$(Ker\, A)^* = A^*\, Y^*,$$

где A^* *— сопряженный оператор. Другими словами, любой линейный функционал* $x^* \in X^*$, *исчезающий на подпространстве* $\operatorname{Ker} A$, *имеет вид* $\langle x^*, x\rangle = \langle y^*, Ax\rangle$, *где* y^* *– некоторый линейный функционал над пространством* Y *(т.е.* $y^* \in Y^*$*) . И обратно, любой функционал такого вида исчезает на* $\operatorname{Ker} A$ *(последнее утверждение не требует сюръективности* A *).*

Доказательство. а) Покажем, что $A^*Y^* \subset (\operatorname{Ker} A)^*$. Действительно, пусть $x^* = A^*y^*$, т. е. $\langle x^*, x\rangle = \langle y^*, Ax\rangle \quad \forall\, x \in X$. Тогда

$$\langle x^*, x\rangle = \langle y^*, Ax\rangle = \langle y^*, 0\rangle = 0 \qquad \forall\, x \in \operatorname{Ker} A,$$

т. е. $x^* \in (\operatorname{Ker} A)^*$. (Здесь условие $AX = Y$ не требуется.)

б) Покажем, что $(\operatorname{Ker} A)^* \subset A^*Y^*$. Пусть линейный функционал x^* исчезает на $\operatorname{Ker} A$. Рассмотрим оператор

$$T : X \to Y \times \mathbb{R}, \qquad x \to (Ax, \langle x^*, x\rangle)\,,$$

отображающий X в произведение $Y \times \mathbb{R}$. Согласно следствию из леммы о замкнутости образа, образ этого оператора замкнут в $Y \times \mathbb{R}$. Этот образ не совпадает со всем пространством $Y \times \mathbb{R}$, поскольку он не содержит точку $(0, 1)$, ибо по условию из $Ax = 0$ следует, что $\langle x^*, x\rangle = 0$. Тогда по лемме 10 аннулятор подпространства TX содержит ненулевой элемент, т. е. существуют $y^* \in Y^*$ и $c \in \mathbb{R}$ такие, что

$$\langle y^*, Ax\rangle + c\langle x^*, x\rangle = 0 \qquad \forall\, x \in X,$$

и при этом $\|y^*\| + |c| > 0$. Покажем, что $c \neq 0$. Если $c = 0$, то $\langle y^*, Ax\rangle = 0\ \forall\, x \in X$. Отсюда $\langle y^*, y\rangle = 0\ \forall\, y \in Y$ (ибо $AX = Y$), т.е. $y^* = 0$, противоречие.

Итак, $c \neq 0$. Тогда

$$\langle x^*, x\rangle = -\langle \frac{1}{c}\, y^*, Ax\rangle \qquad \forall\, x \in X\,,$$

т.е. $\langle x^*, x\rangle = \langle y_1^*, Ax\rangle$, где $y_1^* = -\frac{1}{c}\, y^* \in Y^*$, что и требовалось. □

2.3 Условия минимума в гладких задачах с ограничениями

1. Производная по направлению. Производная Гато. ([16], с. 137)
Пусть X, Y – банаховы пространства, $U \subset X$ — открытое множество, $x_0 \in U$ — точка, $F : U \to Y$ — оператор, $h \in X$ — фиксированный элемент (направление).

Определение 2.10. Пусть существует предел

$$\lim_{\varepsilon \to +0} \frac{F(x_0 + \varepsilon h) - F(x_0)}{\varepsilon}\,,$$

понимаемый в смысле сходимости по норме пространства Y. Тогда он называется *производной* оператора F в точке x_0 *по напрвлению* h и обозначается $F'(x_0;h)$.

Определение 2.11. Пусть оператор F в точке x_0 имеет производную $F'(x_0,h)$ по любому направлению $h \in X$, и при этом отображение $h \mapsto F'(x_0,h)$ представляет собой линейный непрерывный оператор. Обозначим его $F'_\Gamma(x_0)$. Он называется *производной Гато* оператора F в точке x_0.

Если оператор *дифференцируем по Гато* в точке x_0, то есть имеет в этой точке производную Гато, то он имеет производную по любому направлению h, которая дается формулой

$$F'(x_0,h) = F'_\Gamma(x_0)h.$$

Далее, если оператор имеет в точке x_0 производную Фреше $F'(x_0)$, то он имеет и производную Гато $F'_\Gamma(x_0)$, и они совпадают:

$$F'_\Gamma(x_0) = F'(x_0).$$

Обратное не имеет места; например, уже в $\mathbb{R}^2$ функция дифференцируемая по Гато в точке не обязана быть непрерывной в этой точке (см. [16], с. 141), в то время как из дифференцируемости по Фреше непрерывность, конечно, следует.

Итак, для точки x_0 мы имеем:

непрерывная дифференцируемость $\Rightarrow$ *строгая дифференцируемость* $\Rightarrow$ *дифференцируемость по Фреше* $\Rightarrow$ *дифференцируемость по Гато* $\Rightarrow$ *дифференцируемость по каждому направлению*.

Отметим также, что строгая дифференцируемость оператора g в точке x_0 (а значит, и непрерывная дифференцируемость в точке) влечет липшицевость в окрестности этой точки. Это вытекает, например, из представления

$$g(x) = g'(x_0)x + (g(x) - g'(x_0)x),$$

где $(g(x) - g'(x_0)x)$ имеет произвольную малую константу Липшица, если окрестность точки x_0 достаточно мала. Таким образом, константа Липшица оператора g в окрестности точки x_0 сколь угодно близка к величине $\|g'(x_0)\|$, если окрестность точки достаточно мала.

2. Минимизация функционала на множестве. Пусть X — банахово пространство, $f : X \to \mathbb{R}$ — функционал, $M \subset X$ — множество, $x_0 \in M$ — точка. Ниже достаточно считать, что f определен в некоторой окрестности U точки x_0.

Определение 2.12. x_0 — точка *локального минимума* f *на* M, если существует $\varepsilon > 0$ такое, что для всех $x \in M$ таких, что $\|x - x_0\| < \varepsilon$, имеет место неравенство $f(x) \geqslant f(x_0)$.

Нас будут интересовать необходимые условия локального минимума f на M. Чтобы их получить, нужно предположить определенные свойства f в окрестности точки x_0.

Теорема 27. *Пусть* f *имеет производную в точке* $x_0 \in M$ *по любому направлению* $\bar{x} \in T_{x_0}(M)$ *и удовлетворяет условию Липшица в окрестности точки* x_0. *Пусть* x_0 *— точка локального минимума* f *на* M. *Тогда*

$$f'(x_0, \bar{x}) \geqslant 0 \qquad \forall\, \bar{x} \in T_{x_0}(M).$$

Доказательство. Возьмем произвольный $\bar{x} \in T_{x_0}(M)$. По определению найдется функция $\tilde{x}(\varepsilon) : (0, \varepsilon_0) \to X$ $(\varepsilon_0 > 0)$ такая, что при $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$

$$x_0 + \varepsilon\bar{x} + \tilde{x}(\varepsilon) \in M, \quad \|\tilde{x}(\varepsilon)\| = o(\varepsilon).$$

Из наличия локального минимума в x_0 на M вытекает, что

$$f(x_0) \leq f(x_0 + \varepsilon\bar{x} + \tilde{x}(\varepsilon))$$

при всех достаточно малых $\varepsilon > 0$. Поскольку f удовлетворяет условию Липшица в окрестности точки x_0 с некоторой константой $L > 0$, то

$$f(x_0 + \varepsilon\bar{x} + \tilde{x}(\varepsilon)) \leqslant f(x_0 + \varepsilon\bar{x}) + L\|\tilde{x}(\varepsilon)\| = f(x_0 + \varepsilon\bar{x}) + o(\varepsilon).$$

Следовательно, $f(x_0) \leqslant f(x_0 + \varepsilon\bar{x}) + o(\varepsilon)$. Отсюда вытекает, что

$$f'(x_0, \bar{x}) = \lim_{\varepsilon \to +0} \frac{f(x_0 + \varepsilon\bar{x}) - f(x_0)}{\varepsilon} \geqslant 0\,.$$

□

Следствие 3. *Пусть* f *строго дифференцируема в точке* $x_0 \in M$, *и пусть* $T_{x_0}(M)$ *— подпространство. Тогда необходимое условие локального минимума функции* f *на* M *в* x_0 *состоит в том, что*

$$f'(x_0)\bar{x} = 0 \qquad \forall\, \bar{x} \in T_{x_0}(M).$$

Доказательство. Пусть $\bar{x} \in T_{x_0}(M)$ — произвольный элемент. Поскольку $T_{x_0}(M)$ — подпространство , то и $(-\bar{x}) \in T_{x_0}(M)$. По теореме 27

$$f'(x_0)\bar{x} \geqslant 0 \quad \text{и} \quad f'(x_0)(-\bar{x}) \geqslant 0\,.$$

Следовательно, $f'(x_0)\bar{x} = 0$. □

3. Гладкая задача с ограничением типа равенства. Пусть X, Y - банаховы пространства, $U \subset X$ - открытое множество, $f : U \to \mathbb{R}$ - функционал, $g : U \to Y$ - оператор. Рассмотрим задачу:

$$f(x) \to \min, \qquad g(x) = 0. \tag{2.28}$$

Пусть $x_0 \in U$ — *допустимая точка*, т.е. $g(x_0) = 0$. Предположим, что f и g строго дифференцируемы в точке x_0 (например, достаточно считать, что f и g непрерывно дифференцируемы на U , т.е. $f \in C^1(U)$ $\;g \in C^1(U, Y)$).

Предположим также, что выполнено условие Люстерника $g'(x_0)X = Y$, и следовательно, по теореме Люстерника касательный конус к множеству $M = \{x \in U \mid g(x) = 0\}$ в точке x_0 есть подпространство $\operatorname{Ker} g'(x_0)$.

Пусть теперь x_0 есть точка локального минимума. Согласно теореме 3, необходимое условие локального минимума в этой точке состоит в том, что

$$\langle f'(x_0), \bar{x}\rangle = 0 \quad \forall \bar{x} \in \operatorname{Ker} g'(x_0). \tag{2.29}$$

Согласно лемме об аннуляторе ядра линейного сюрьективного оператора существует $y^* \in Y^*$ такой, что

$$f'(x_0) + y^* \circ g'(x_0) = 0, \tag{2.30}$$

где $y^* \circ g'(x_0) = [g'(x_0)]^* y^*$ (т.е. $\langle y^* \circ g'(x_0), x\rangle = \langle y^*, g'(x_0)x\rangle \; \forall x \in X$).

Итак, необходимое условие (2.29) мы представили в форме (2.30). Некоторое "неудобство" полученного условия состоит в том, что требуется выполнение условия Люстерника. Формально этого требования можно избежать в тех случаях, когда известно, что образ $g'(x_0)X$ замкнут. Последнее, как мы узнаем позже, верно для операторов ограничений равенства в задачах оптимального управления. Это верно и в случае, когда $\dim\, Y < +\infty$.

В предположении о замкнутости образа $g'(x_0)X$, формально более слабом, чем условие $g'(x_0)X = Y$, правило множителей Лагранжа, т.е. необходимое условие локального минимума, формулируется в следующем виде:
существуют $\alpha \in \mathbb{R}$ и $y^* \in Y^*$, не равные нулю одновременно, и такие, что

$$\alpha f'(x_0) + y^* \circ g'(x_0) = 0. \tag{2.31}$$

Если условие Люстерника выполнено, то (2.31) реализуется с $\alpha = 1$, т.е. в виде (2.30). Если же условие Люстерника не выполнено, то по предположению образ $g'(x_0)X$ есть замкнутое подпространство в Y. Тогда по лемме о нетривиальности аннулятора существует $y^* \neq 0$ такой, что $\langle y^*, g'(x_0)X\rangle = 0$. Условие (2.31) реализовалось на этот раз с $\alpha = 0$. Ничего другого, кроме констатации факта, что $g'(x_0)X \neq Y$, это условие в данном случае в себе не несет. По сути дела, при невыполненом условии Люстерника мы отказываемся от исследования задачи. Однако, подобная форма записи необходимого условия оказывается удобной.

Отметим также, что, не ограничивая общности, в необходимом условии (2.31) мы можем считать $\alpha \geqslant 0$, ибо это условие выдерживает умножение на (-1) .

Если ввести *функцию Лагранжа* $L(x, \alpha, y^*) = \alpha f(x) + \langle y^*, g(x)\rangle$, то условие (2.31) можно записать так: $L'_x(x_0, \alpha, y^*) = 0$, где L'_x — частная производная Фреше (определяемая естественным образом). Это условие в столь общей бесконечномерной задаче с ограничением типа равенства впервые было доказано Л.А.Люстерником в 1934 году.

Итак, доказана следующая теорема:

Теорема 28 (Л.А.Люстерник). *Пусть f и g строго дифференцируемы в точке $x_0 \in U$ такой, что $g(x_0) = 0$, и пусть образ $g'(x_0)X$ замкнут в Y . Пусть x_0 — точка локального минимума в задаче* (2.28). *Тогда существуют множители Лагранжа $\alpha \in \mathbb{R}$ и $y^* \in Y^*$ такие, что*

$$\alpha \geqslant 0, \tag{2.32}$$

$$\alpha + \|y^*\| > 0, \tag{2.33}$$

$$L'_x(x_0, \alpha, y^*) = 0, \tag{2.34}$$

где $L(x, \alpha, y^*) = \alpha f(x) + \langle y^*, g(x)\rangle$ — функция Лагранжа.

Здесь (2.32) — условие *неотрицательности* множителя α , (2.33) — условие *нетривиальности* набора (α, y^*) , (2.34) — условие *стационарности* по x функции Лагранжа.

Эта теорема реализует так называемый *принцип Лагранжа*, состоящий в том, что если x_0 — точка минимума в задаче с ограничениями, то найдутся множители Лагранжа, при которых функция Лагранжа стационарна в этой точке в задаче без ограничений.

Задание. Сформулируйте теорему 28 в случае, когда $Y = \mathbb{R}^m$ и, следовательно, $g = (g_1, \dots g_m)$ - конечный набор функционалов над X . В этом случае образ $g'(x)X$ автоматически замкнут.

4. Условия минимума в гладкой задаче с ограничениями типа равенства и неравенства. Пусть X — банахово пространство, $U \subset X$ — открытое множество, на котором заданы функционалы $f_i : U \to \mathbb{R}$, $i = 0, \dots, k$, и оператор $g : U \to Y$, действующий в другое банахово пространство Y . Предположим, что все f_i и g непрерывно диференцируемы на U , причем, образ $g'(x)X$ замкнут в Y $\forall x \in U.$ Рассмотрим задачу:

$$f_0(x) \to \min, \quad f_i(x) \leqslant 0, \quad i = 1, \dots, k, \quad g(x) = 0. \tag{2.35}$$

Назовем ее *гладкой задачей с ограничениями типа равенства и типа неравенства* (иногда ее называют также *гладкой задачей математического программирования*).

Пусть $\alpha = (\alpha_0, \dots, \alpha_k) \in \mathbb{R}^{k+1}$, $y^* \in Y^*$. Введем функцию Лагранжа задачи (2.35):

$$L(x, \alpha, y^*) = \sum_{i=0}^{k} \alpha_i f_i(x) + \langle y^*, g(x) \rangle.$$

Назовем α_0, ... , α_k, y^* *множителями Лагранжа*, а через $\lambda = (\alpha_0, \dots, \alpha_k, y^*) = (\alpha, y^*)$ будем обозначать произвольный набор множителей Лагранжа. Таким образом, $L = L(x, \lambda)$.

Теорема 29 (Правило множителей Лагранжа). *Пусть $x_0 \in U$ — точка локального минимума в задаче (2.35). Тогда существуют набор $\lambda = (\alpha_0, \dots, \alpha_k, y^*)$ такой, что выполнены следующие условия*

$$\alpha_0 \geqslant 0, \ \alpha_1 \geqslant 0, \dots, \alpha_k \geqslant 0, \tag{2.36}$$

$$\sum_{0}^{k} \alpha_i + \|y^*\| > 0, \tag{2.37}$$

$$\alpha_i f_i(x_0) = 0, \quad i = 1, \dots, k, \tag{2.38}$$

$$L'_x(x_0, \lambda) = 0. \tag{2.39}$$

Условия имеют следующие названия: (2.36) — условия *неотрицательности*, (2.37) — условие *нетривиальности*, (2.38) — условия *дополняющей нежесткости*, (2.39) — условие *стационарности по x функции Лагранжа.*

Доказательства теоремы проведем по схеме Дубовицкого—Милютина, которая здесь реализуется в наиболее простом и ясном виде. Первый шаг этой схемы состоит в переходе от ограничений задачи к аппроксимирующим их выпуклым конусам. Аппроксимации берутся для точки $x_0 \in U$, удовлетворяющей всем ограничениям и исследуемой на локальный минимум. Наряду с ограничениями в этой точке аппроксимируется также и так называемое "множество убывания целевого функционала", т.е. множество x таких, что $f_0(x) < f_0(x_0)$.

Введем для точки x_0 *множество активных индексов*

$$I = \{i \in \{1, \dots, k\} \mid f_i(x_0) = 0\} \cup \{0\}. \tag{2.40}$$

Лемма 13 (о непересечении аппроксимаций). *Пусть $x_0 \in U$ — точка локального минимума в задаче (2.35). Пусть $g'(x_0)X = Y$, т.е. для g в x_0 выполнено условие Люстерника. Тогда не существует $\bar{x} \in X$, удовлетворяющего условиям:*

$$\langle f_i'(x_0), \bar{x} \rangle < 0, \quad i \in I, \tag{2.41}$$

$$g'(x_0)\bar{x} = 0. \tag{2.42}$$

Доказательство. Не ограничивая общности, будем считать что $f_0(x_0) = 0$, заменив, если надо, $f_0(x)$ на $f_0(x) - f_0(x_0)$.

Пусть $\bar{x}$ удовлетворяет условиям (2.41) и (2.42). Согласно теореме Люстерника вектор $\bar{x}$ (в силу (2.42)) является касательным к ограничению $g(x) = 0$ в точке x_0. Следовательно, существует $\tilde{x}(\varepsilon) : (0, \varepsilon_0) \to X$ $(\varepsilon_0 > 0)$ такая, что

$$g(x_0 + \varepsilon\bar{x} + \tilde{x}(\varepsilon)) = 0, \qquad \|\tilde{x}(\varepsilon)\| = o(\varepsilon). \tag{2.43}$$

Положим $x_\varepsilon = x_0 + \varepsilon\bar{x} + \tilde{x}(\varepsilon)$. Покажем, что $\{x_\varepsilon\}$ "нарушает"минимум в точке x_0. Действительно, имеем

$$g(x_\varepsilon) = 0 \ \ \forall\, \varepsilon \in (0, \varepsilon_0), \qquad \|x_\varepsilon - x_0\| \to 0 \ \ (\varepsilon \to +0). \tag{2.44}$$

Пусть i не принадлежит I, $i \in \{1, \dots, k\}$, т.е. $f_i(x_0) < 0$. Тогда из непрерывности f_i в точке x_0 в силу (2.44) следует, что $f_i(x_\varepsilon) < 0$ для всех достаточно малых $\varepsilon > 0$, то есть i -е ограничение выполнено.

Пусть теперь $i \in I.$ Тогда $f_i(x_0) = 0$ и $\langle f_i'(x_0), \bar{x} \rangle < 0$ в силу (2.41), и поэтому

$$f_i(x_\varepsilon) = f_i(x_0 + \varepsilon\bar{x} + \tilde{x}(\varepsilon)) = f_i(x_0) + \langle f_i'(x_0), \varepsilon\bar{x} + \tilde{x}(\varepsilon) \rangle + o(\varepsilon) = \varepsilon\langle f_i'(x_0), \bar{x} \rangle + o(\varepsilon).$$

Поскольку $\varepsilon > 0$, $\langle f_i'(x_0), \bar{x} \rangle < 0,$ то $f_i(x_\varepsilon) < 0$ для всех достаточно малых $\varepsilon > 0$, то есть и в этом случае для $i \neq 0$ i -е ограничение выполнено, а для $i = 0$ имеем $f_0(x_\varepsilon) < 0 = f_0(x_0)$ всех достаточно малых $\varepsilon > 0.$ Но тогда $\{x_\varepsilon\}$ удовлетворяет всем ограничениям и понижает функционал задачи, что противоречит локальному минимуму в точке x_0 . Лемма доказана. □

Нам также понадобится следующий простой факт.

Предложение 6 (сопряженный конус к полупространству). *Пусть $l : X \to \mathbb{R}$ — ненулевой линейный функционал. Пусть $K = \{x \in X \mid \langle l, x \rangle > 0\}$ — открытое полупространство. Пусть $m \in K^*$, т.е. $\langle m, x \rangle \geqslant 0 \ \ \forall x \in K.$ Тогда существует $\lambda \geqslant 0$ такое, что $m = \lambda l.$ Таким образом, сопряженный конус к полупространству есть луч, натянутый на функционал, определяющий это полупространство.*

Доказательство. Покажем сначала, что $\langle m, x \rangle = 0 \ \ \forall x \in \operatorname{Ker} l.$ Действительно, пусть $x_0 \in \operatorname{Ker}\, l$, т.е. $\langle l, x_0 \rangle = 0$ и пусть x_1 таков, что $\langle l, x_1 \rangle > 0$. Тогда $x_1 + \beta x_0 \in K \ \ \forall \beta \in \mathbb{R}.$ Следовательно, $\langle m, x_1 \rangle + \beta\langle m, x_0 \rangle \geqslant 0 \ \ \forall \beta \in \mathbb{R}.$ Это возможно лишь при $\langle m, x_0 \rangle = 0$. Итак, $\langle l, x \rangle = 0 \ \Rightarrow\ \langle m, x \rangle = 0.$ Отсюда, как мы знаем, следует существование $\lambda \in \mathbb{R}$ такого, что $m = \lambda\, l.$ Поскольку из $\langle l, x \rangle > 0$ вытекает, что $\langle m, x \rangle \geqslant 0$, то, очевидно, $\lambda \geqslant 0.$ □

Теперь мы готовы дать

Доказательство теоремы 29. Пусть x_0 — точка локального минимума в задаче (2.35). Если среди функционалов $f_i'(x_0)$, $i \in I$ есть нулевой, то полагая соответствующий ему множитель α_i равным 1, а остальные множители (включая y^*) равными нулю, получаем набор λ, удовлетворяющий всем условиям (2.36)-(2.39) теоремы. Поэтому далее считаем, что $f_i'(x_0) \neq 0 \quad \forall i \in I$, и тогда все полупространства (2.41) непусты.

Рассмотрим два случая.

а) *Невырожденный случай*: $g'(x_0)X = Y$. В этом случае согласно лемме 13 система условий (2.41) и (2.42) несовместна. Положим

$$\Omega_i = \{\bar{x} \mid \langle f_i'(x_0), \bar{x} \rangle < 0\}, \;\; i \in I, \qquad \Omega = \{\bar{x} \mid g'(x_0) = 0\}.$$

Пересечение полупространств Ω_i, $i \in I$ и подпространства Ω пусто.
Согласно теореме Дубовицкого-Милютина о непересечении конусов существуют $x_i^* \in \Omega_i^*$, $i \in I$, $\quad x^* \in \Omega^*$, не все равные нулю и такие, что $\quad \sum_I x_i^* + x^* = 0$.
Согласно предложению 6 $x_i^* = -\alpha_i f_i'(x_0)$, $\quad \alpha_i \geqslant 0$, $\quad i \in I$, а по лемме об ануляторе $x^* = [g'(x_0)]^*(-y^*) = -y^* \circ g'(x_0)$, где $y^* \in Y^*$ (знак минус удобен). Следовательно,

$$-\sum_I \alpha_i f_i'(x_0) - y^* \circ g'(x_0) = 0.$$

Остается положить $\alpha_i = 0$ при $i \notin I$. Тогда все условия (2.36)-(2.39) теоремы оказываются выполненными. (Набор α_i, y^* нетривиален, ибо в противном случае набор x_i^*, x^* тривиален.)

б) *Вырожденный случай*: $g'(x_0)X \neq Y$. В этом случае образ $L = g'(x_0)X$ есть замкнутое пространство в Y, не совпадающее с Y. Тогда по лемме о нетривиальности аннулятора существует функционал $y^* \neq 0$, аннулирующийся на L. Следовательно, $\langle y^* g'(x_0), x \rangle = 0 \;\; \forall x \in X$. Положим $\alpha_i = 0 \;\forall i = 0, \ldots, k$. Тогда набор $\lambda = (0, \ldots, 0, y^*)$ удовлетворяет всем условиям (2.36)-(2.39) теоремы. (В этом случае правило множителей Лагранжа лишь констатирует тот факт, что $g'(x_0)X \neq Y$, и мы отказываемся от исследования задачи на минимум.) □

Замечание. *Из доказательства видно, что условия теоремы могут быть ослаблены. А именно, достаточно считать, что в точке x_0 все функционалы f_i дифференцируемы по Фреше, а оператор g строго дифференцируем, и, кроме того, образ $g'(x_0)X$ замкнут в Y.*

2.4 Негладкая задача с ограничениями.

1. Теорема о непересечении аппроксимаций. Пусть X — банахово пространство, $U \subset X$ — открытое множество, $f : U \to \mathbb{R}$ — функционал, $x_0 \in U$ — фиксированная точка, $\bar{x} \in X$ — вектор (направление). Определим верхнюю производную $\bar{f}'(x_0, \bar{x})$ функционала f в точке x_0 по направлению $\bar{x}$ как верхний предел:

$$\varlimsup_{\varepsilon \to +0} \frac{f(x_0 + \varepsilon \bar{x}) - f(x_0)}{\varepsilon} = \bar{f}'(x_0, \bar{x}).$$

Пусть теперь на U заданы функционалы $f_i : U \to \mathbb{R}, \quad i = 0, 1, \dots, k,$ удовлетворяющие условию Липшица с общей константой L, и пусть $\bar{f}_i'(x_0, \bar{x})$ — их верхние производные в точке $x_0 \in U$ по направлению $\bar{x}$. Пусть имеется также множество $M \subset X$, причем $x_0 \in M$. Обозначим через $T_{x_0}(M)$ касательный конус в x_0 к M.

Рассмотрим следующую **задачу** $\mathcal{Z}$:

$$f_0(x) \to \min, \quad f_i(x) \le 0, \quad i = 1, \dots, k, \quad x \in M. \tag{2.45}$$

Пусть $x_0 \in U$ — допустимая точка в этой задаче. Без нарушения общности будем считать, что $f_0(x_0) = 0$ (для этого надо перейти к функционалу $f_0(x) - f_0(x_0)$), и введем так называемое *множество активных индексов задачи* в точке x_0 : $I = \{i \in \{0, 1, \dots, k\} \mid f_i(x_0) = 0\}$. По определению $i = 0 \in I$, т.е. индекс, соответствующий функционалу задачи, всегда активный.

Теорема 30. *Если x_0 — точка локального минимума в задаче $\mathcal{Z}$, то не существует $\bar{x} \in X$ такого, что*

$$\bar{f}_i'(x_0, \bar{x}) < 0, \quad i \in I, \tag{2.46}$$

$$\bar{x} \in T_{x_0}(M). \tag{2.47}$$

Это и есть теорема о непересечении аппроксимаций в задаче $\mathcal{Z}$. Верхняя производная по направлению представляет собой положительно однородный функционал по $\bar{x}$. Отсюда следует, что каждое из множеств, определяемых неравенствами (2.46), есть конус. Дубовицкий и Милютин назвали множество $\{\bar{x} \mid \bar{f}_0'(x_0, \bar{x}) < 0\}$ *конусом запрещенных вариаций* в точке x_0 для функционала f_0, а множество $\{\bar{x} \mid \bar{f}_i'(x_0, \bar{x}) < 0\}$ при $i \in I$, $i \ne 0$ — *конусом допустимых вариаций* в точке x_0 для ограничения типа неравенства $f_i(x) \le 0$. (Для $i \notin I$ каждый такой конус по определению есть все пространство X). Наконец, $T_{x_0}(M)$ есть *конус касательных вариаций в точке x_0 для ограничения* $x \in M$. Все это — аппроксимации функционала и ограничений задачи в точке x_0.

Обратим внимание, что с функционалом задачи мы поступаем так же, как поступили бы с ограничением неравенства $f_0(x) - f_0(x_0) \le 0$, которое автоматически активно.

Итак, необходимое условие первого порядка локального минимума в точке x_0 есть непересечение аппроксимаций в этой точке. Это условие называют также *условием стационарности.* Как мы уже видим, оно носит очень общий характер. Далее мы увидим, что весьма широкие классы задач оптимального управления укладываются в данную абстрактную схему.

Доказательство теоремы 30. Допустим противное — что существует $\bar{x}$, удовлетворяющий условиям (2.46) и (2.47). Покажем, что тогда x_0 не является точкой локального минимума в задаче $\mathcal{Z}$. Из (2.46) вытекает, что $\forall\, i \in I \quad \bar{f}_i'(x_0, \bar{x}) \le -a$ при некотором $a > 0$.

Поскольку $\bar{x} \in T_{x_0}(M)$, то существует функция $\tilde{x}(\varepsilon) : (0, \varepsilon_0) \to X$ такая, что

$$x_0 + \varepsilon\bar{x} + \tilde{x}(\varepsilon) \in M; \qquad \|\tilde{x}(\varepsilon)\| = o(\varepsilon).$$

Положим $x_\varepsilon = x_0 + \varepsilon\bar{x} + \tilde{x}(\varepsilon)$. Тогда $x_\varepsilon \to x_0$ (при $\varepsilon \to +0$) . Пусть $i \notin I$ (неактивный индекс). Тогда $f_i(x_0) < 0$ и, следовательно, $f_i(x_\varepsilon) < 0$ для всех достаточно малых $\varepsilon > 0$. Поэтому считаем, что при любом $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$

$$f_i(x_\varepsilon) < 0 \quad \forall i \notin I, \quad x_\varepsilon \in U, \quad x_\varepsilon \in M. \tag{2.48}$$

Рассмотрим теперь $i \in I$ — активный индекс. Поскольку f_i удовлетворяет условию Липшица на U с константой L , то

$$|f_i(x_0 + \varepsilon\bar{x} + \tilde{x}(\varepsilon)) - f_i(x_0 + \varepsilon\bar{x})| \le L\|\tilde{x}(\varepsilon)\| = o(\varepsilon). \tag{2.49}$$

Далее, из определения верхней производной по направлению вытекает, что

$$f_i(x_0 + \varepsilon\bar{x}) - f_i(x_0) \le \ \varepsilon \bar{f}_i'(x_0, \bar{x}) + o(\varepsilon) \le -a\varepsilon + o(\varepsilon). \tag{2.50}$$

Из условий (2.49), (2.50) и (2.46) получаем:

$$f_i(x_0 + \varepsilon\bar{x} + \tilde{x}(\varepsilon)) - f_i(x_0) \ \le \ -a\varepsilon + o(\varepsilon) < 0$$

для всех достаточно малых $\varepsilon > 0$.

Считаем, что это верно для $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$. Итак, при любом $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$

$$f_i(x_\varepsilon) < f_i(x_0), \quad i \in I. \tag{2.51}$$

Но условия (2.48) и (2.51) совместно с условием $x_\varepsilon \longrightarrow x_0$ означают отсутствие локального минимума в точке x_0 в задаче $\mathcal{Z}$. Теорема доказана. $\square$

При внимательном анализе проведенного доказательства можно заметить, что предположение о существовании $\bar{x}$, удовлетворяющего системе (2.46), (2.47), приводит не только к нарушению локального минимума в x_0 , но и к нарушению следующего свойства, которое называется $s-$ необходимостью.

Определение 2.13. Будем говорить, что в в задаче $\mathcal{Z}$ в точке x_0 выполнена $s-$ необходимость, если не существует последовательности $x_n \to x_0$ такой, что для всех $n \quad x_n \in M$, и $f_i(x_n) < 0 \quad \forall\, i = 0, 1, \ldots, k$.

(Очевидно, можно требовать выполнения этих условий лишь для всех достаточно далеких членов последовательности, а выполнение неравенства $f_i(x_n) < 0$ достаточно требовать лишь для всех активных индексов, так как для неактивных оно будет выполнено автоматически.) В терминах окрестностей отсутствие $s-$ необходимости в точке x_0 означает, что в любой окрестности точки x_0 найдется точка $x \in M$, в которой все $f_i(x) < 0, \ \ i = 0, 1, \ldots, k$.

Легко видеть, что если в точке x_0 имеется локальный минимум, то в ней выполнена и $s-$ необходимость. Таким образом, *$s-$ необходимость есть необходимое условие локального минимума.* В это условие функционал задачи f_0 и все ограничения неравенства f_i входят абсолютно симметрично, в отличие от понятия локального минимума. Более того, можно показать, что $s-$ необходимость есть *сильнейшее* необходимое условие локального минимума, в которое функционал задачи и ограничения неравенства входят симметрично. Сильнейшее в том смысле, что любое другое необходимое условие локального минимума, симметричное относительно всех $f_i, \ \ i = 0, 1, \ldots, k,$ вытекает из $s-$ необходимости, а не только из самого локального минимума в точке x_0. Понятие $s-$ необходимости, введенное А.А. Милютиным, вместе с соответствующим понятием $s-$ достаточности, которое мы здесь не рассматриваем (оно эквивалентно наличию *строгого* локального минимума в точке x_0), оказалось очень удобным для получения и анализа условий экстремума в различных классах задач с ограничениями.

Итак, вместе с теоремой 30 мы фактически доказали несколько более сильное утверждение.

Теорема 31. *Если в точке x_0 выполнена $s-$ необходимость в задаче $\mathcal{Z}$, то эта точка стационарна, т.е. не существует $\bar{x} \in X$, удовлетворяющего условиям (2.46), (2.47).*

Задача $\mathcal{Z}$ имеет довольно общий абстрактный характер. Для дальнейшего продвижения мы несколько сузим ее постановку. Будем предполагать, что

(а) *f_i удовлетворяет условию Липшица на U $(i = 0, \ldots, k)$;*

(б) *f_i обладает в точке x_0 производной по каждому направлению $\bar{x}$ $(i \in I)$;*

(в) *множество M задается равенством $g(x) = 0$, где $g : U \to Y$ – оператор, строго дифференцируемый по Фреше в точке x_0 ;*

(г) *оператор g в точке x_0 удовлетворяет условию Люстерника: $g'(x_0)X = Y$.*

Из двух последних условий по теореме Люстерника

$$T_{x_0}(M) \ = \ \{\bar{x} \mid g'(x_0)\bar{x} = 0\}.$$

Итак, мы рассматриваем **задачу** $\mathcal{Z}_1$:

$$f_0(x) \to \min, \quad f_i(x) \le 0, \quad i = 1, \ldots, k, \quad g(x) = 0. \tag{2.52}$$

При сделанных предположениях имеет место следующая теорема, вытекающая из предыдущей.

Теорема 32. *Пусть в задаче $\mathcal{Z}_1$ в точке x_0 имеется локальный минимум (или хотя бы выполнена $s-$ необходимость). Тогда выполнено следующее условие стационарности: не существует такого $\bar{x} \neq 0$, что*

$$f_i'(x_0, \bar{x}) < 0, \qquad i \in I, \tag{2.53}$$

$$g'(x_0)\,\bar{x} = 0. \tag{2.54}$$

Далее нас будет интересовать анализ условия стационарности. Мы получим двойственный критерий этого условия, т.е. критерий, сформулированный в терминах сопряженного пространства. Для этого нам понадобится предположение о том, что функционалы $f_i'(x_0, \bar{x})$ являются не только однородными, но и выпуклыми по $\bar{x}$. В этом случае конусы, определяемые неравенствами (2.53), оказываются выпуклыми и открытыми, и мы сможем сформулировать условие несовместности системы (2.53) и (2.54) с помощью теоремы Дубовицкого—Милютина о непересечении конечного числа выпуклых конусов. Таков наш план.

Как уже было сказано, путь, которым мы сейчас следуем, соответствует абстрактной схеме Дубовицкого — Милютина. Опыт последних 40 лет показал, что это — самый универсальный и удобный метод получения необходимых условий первого порядка для локального минимума в разнообразных задачах на экстремум с ограничениями.

2. Сублинейный функционал. Пусть X — банахово пространство. Функционал $\varphi : X \to \mathbb{R}$ называется *сублинейным*, если он является положительно однородным и выпуклым:

(a) $\varphi(\lambda x) = \lambda\varphi(x) \quad \forall x \in X,\ \lambda > 0,$

(b) $\varphi(x+y) \le \varphi(x) + \varphi(y) \quad \forall x, y \in X$.

Первое условие есть положительная однородность. Условие (b) называется субаддитивностью; для положительно однородного функционала оно эквивалентно выпуклости (докажите).

Сублинейный функционал φ называется *ограниченным* (по аналогии с ограниченным линейным функционалом), если существует константа $C > 0$ такая, что

(c) $\qquad |\varphi(x)| \le C\|x\| \quad \forall\, x \in X.$

В силу однородности это условие эквивалентно ограниченности φ на единичном шаре в X . Мы покажем, что для этого достаточно ограниченности φ *сверху* на шаре. В дальнейшем мы рассматриваем только ограниченные сублинейные функционалы.

Лемма 14. *Если* $\varphi(x) \le C\|x\| \quad \forall\, x \in X,$ *то и* $|\varphi(x)| \le C\|x\| \quad \forall\, x \in X,$ *и* φ *липшицев во всем пространстве* X *с константой* C.

Доказательство. Так как $\varphi(-x) \le C||x||,$ а $0 = x + (-x),$ то

$$0 = \varphi(0) = \varphi(x + (-x)) \le \varphi(x) + \varphi(-x),$$

поэтому $-\varphi(x) \le \varphi(-x) \le C||x||.$ Отсюда с учетом неравенства $\varphi(x) \le C||x||$ получаем $|\varphi(x)| \le C||x|| \ \forall\, x \in X.$ Далее, для любых $x, y \in X$ имеем:

$$\varphi(y) = \varphi(x + (y-x)) \le \varphi(x) + \varphi(y-x) \le \varphi(x) + C\|y-x\|\,,$$

следовательно, $\varphi(y) - \varphi(x) \le C\|y-x\|.$ Но точно так же $\varphi(x) - \varphi(y) \le C\|x-y\|,$ и поэтому $|\varphi(y) - \varphi(x)| \le C\|y-x\|$. □

Линейный функционал $l \in X^*$ называется *опорным* к сублинейному функционалу $\varphi,$ если $l(x) \le \varphi(x) \ \forall x \in X.$ Множество всех опорных к φ обозначается $\partial\varphi$ и называется *субдифференциалом* функционала φ (в нуле), а его элементы $l \in \partial\varphi$ (т.е. опорные) – *субградиентами* функционала φ (в нуле).

Отметим, что если $C > 0$ таково, что $\varphi(x) \le C\|x\| \ \ \forall\, x \in X,$ то все множество опорных $\partial\varphi$ содержится в шаре $B_C(0)$.

Действительно, если $l \in \partial\varphi$, то $\langle l, x\rangle \le \varphi(x) \le C\|x\| \quad \forall\, x$. Отсюда $\langle l, x\rangle \le C\|x\| \ \forall\, x$, и поэтому $|\langle l, x\rangle| \le C\|x\| \ \forall\, x$, а тогда $\|l\| \le C$.

Итак, у ограниченного сублинейного функционала множество $\partial\varphi$ ограничено. Элементарно проверяется, что $\partial\varphi$ выпукло и замкнуто. Более того, из теоремы отделимости вытекает, что оно слабо-* замкнуто. (Покажите!). Как следует из теоремы Алаоглу, ограниченное слабо-* замкнутое множество в сопряженном пространстве есть компакт в слабой-* топологии этого пространства. Таким образом, $\partial\varphi$ выпукло и слабо-* компактно в X^* .

Покажем теперь, что $\partial\varphi$ непусто. Мы установим даже более сильный факт.

Теорема 33. *Пусть $\varphi : X \to \mathbb{R}$ - ограниченный сублинейный функционал. Тогда множество его опорных $\partial\varphi$ непусто и имеет место формула*

$$\varphi(x) = \max_{l \in \partial\varphi} \langle l, x\rangle \qquad \forall\, x \in X\,, \tag{2.55}$$

причем для любого $x \in X$ максимум в правой части этой формулы достигается (что, впрочем, вытекает и из слабой- компактности $\partial\varphi$).*

Доказательство. Если $l \in \partial\varphi$, то $\langle l, x\rangle \le \varphi(x)\ \ \forall\, x$, откуда получаем неравенство

$$\sup_{l \in \partial\varphi} \langle l, x\rangle \le \varphi(x)\ \ \forall\, x.$$

Чтобы установить равенство, достаточно показать, что для любого $x_0 \in X$ найдется $l \in \partial\varphi$ такой, что $\langle l, x_0\rangle = \varphi(x_0)$. Тем самым мы установим непустоту $\partial\varphi$ и достижение максимума в правой части равенства (2.55). В результате теорема будет доказана.

В произведении $X \times \mathbb{R}$ рассмотрим множество $K = \{(x,t) \mid \varphi(x) < t\}.$ Элементарно проверяется, что это непустой выпуклый конус. В силу непрерывности φ он открыт. Пусть $x_0 \in X,\ t_0 = \varphi(x_0)$. Точка (x_0, t_0) не принадлежит K. Следовательно, по теореме Хана–Банаха найдется ненулевой функционал $(l, \alpha) \in X^* \times \mathbb{R}$, отделяющий ее от K :

$$\langle l, x\rangle + \alpha t \le \langle l, x_0\rangle + \alpha t_0 \qquad (x,t) \in K\,. \tag{2.56}$$

Проанализируем это условие. Так как при фиксированном x оно справедливо $\forall\, t > \varphi(x)$, то очевидно $\alpha \le 0$. Если $\alpha = 0$, то $\langle l, x - x_0\rangle \le 0\ \ \forall\, x$, откуда $l = 0$, что противоречит нетривиальности пары (l, α) . Поэтому $\alpha < 0$, и можно положить $\alpha = -1$. Тогда (2.56) приобретает вид:

$$\langle l, x\rangle - \langle l, x_0\rangle \le t - t_0 \qquad \forall\, t > \varphi(x),$$

а тогда это верно и для $t = \varphi(x),$ т.е. для всех $x \in X$ выполнено

$$\langle l, x\rangle - \langle l, x_0\rangle \le \varphi(x) - \varphi(x_0). \tag{2.57}$$

Пусть $\bar{x} \in X$ - произвольный элемент. Положим $x = N\bar{x},$ где N — большое число. Тогда

$$\langle l, \bar{x}\rangle - \frac{1}{N}\langle l, x_0\rangle \ \le\ \varphi(\bar{x}) - \frac{1}{N}\varphi(x_0),$$

откуда при $N \to \infty$ следует, что $\langle l, \bar{x}\rangle \le \varphi(\bar{x})$. В силу произвольности $\bar{x}$ это означает, что $l \in \partial\varphi$, и следовательно, $\partial\varphi$ непусто.

Далее, полагая в (2.57) $x = 0$, получаем $\langle l, x_0\rangle \ge \varphi(x_0).$ Поскольку $l \in \partial\varphi$, то верно и обратное неравенство. Следовательно, имеет место равенство $\langle l, x_0\rangle = \varphi(x_0).$ Теорема доказана. □

Задача. Покажите, что если $\varphi = l$ – линейный функционал в X , то $\partial\varphi$ состоит из единственного элемента l .

Для доказательства следующей теоремы напомним формулировку теоремы Хана–Банаха в алгебраической форме (в которой она и доказывается в стандартных курсах функционального анализа).

Теорема 34. *(о продолжении опорных к сужению сублинейного функционала). Пусть* $X -$ *произвольное векторное пространство,* $\Gamma \subset X$ *– подпространство,* $\varphi : X \longrightarrow \mathbb{R}$ *– произвольный сублинейный функционал,* $\varphi_\Gamma : \Gamma \longrightarrow \mathbb{R}$ *– его сужение на* Γ*. Тогда для любого* $l \in \partial\varphi_\Gamma$ *существует* $\tilde{l} \in \partial\varphi$ *такой, что* $\tilde{l}(x) = l(x)\ \forall\, x \in \Gamma$ *, т.е. сужение* $\tilde{l}$ *на* Γ *есть* l *(и, таким образом,* $\tilde{l}$ *есть продолжение функционала* l *с подпространства* Γ *на все пространство* X*.)*

С помощью этой теоремы докажем следующую важную теорему.

Теорема 35. *(об опорном к сублинейному функционалу от линейного оператора). Пусть* $A : X \longrightarrow Y$ *– линейный оператор,* $\varphi : Y \longrightarrow \mathbb{R}$ *– сублинейный функционал. Определим сублинейный функционал* $f(x) = \varphi(Ax)$ *. Тогда*

$$\partial f \;=\; A^*\,\partial\varphi, \tag{2.58}$$

т.е. любой $p \in \partial f$ *имеет вид* $\langle p, x\rangle = \langle \lambda, Ax\rangle$ *, где* $\lambda \in \partial\varphi$ *.*

Доказательство. Пусть $p \in \partial f$, т.е. $(p,x) \le \varphi(Ax)\ \forall x \in X$. В произведении $X \times Y$ зададим сублинейный функционал $\widehat{\varphi}(x,y) = \varphi(y)$, и рассмотрим подпространство $\Gamma = \{(x,y)\,|\ y = Ax\}$ (график оператора A), на котором зададим линейный функционал $l(x,y) = p(x)$. Тогда на Γ выполнено неравенство $l(x,y) \le \widehat{\varphi}(x,y)$ (ибо $(p,x) \le \varphi(Ax)\ \forall x \in X$.) По теореме 34 функционал l можно продолжить на все пространство $X \times Y$ с сохранением свойства $l \le \varphi$. Но любой линейный функционал l на $X \times Y$ имеет вид $l(x,y) = (\mu,x) + (\lambda,y)$, где $\mu \in X^*$, $\lambda \in Y^*$. Таким образом,

$$(\mu,x) + (\lambda,y) \le \widehat{\varphi}(x,y) = \varphi(y), \qquad \forall\, x, y, \tag{2.59}$$

$$(\mu,x) + (\lambda,y) = l(x,y) = (p,x) \qquad \forall\,(x,y) \in \Gamma. \tag{2.60}$$

Из первого соотношения следует, что $\mu = 0$ и $(\lambda,y) \le \varphi(y)\ \forall y$, т.е. $\lambda \in \partial\varphi$, а из второго, поскольку $y = Ax$ на Γ, что $(p,x) = (\lambda, Ax)$, ч.т.д.

Обратно, пусть $\lambda \in \partial\varphi$, $p = A^*\lambda$. Тогда $(p,x) = (\lambda, Ax) \le \varphi(Ax) = f(x)\ \forall\, x$, откуда следует, что $p \in \partial f$. Таким образом, имеет место равенство (2.58). □

3. Теоремы о сопряженных конусах. Пусть X – банахово пространство.

Теорема 36. *Пусть* $\varphi : X \to \mathbb{R}$ *– сублинейный ограниченный функционал, и пусть конус* $K = \{x \in X \mid \varphi(x) < 0\}$ *непуст. Тогда для любого линейного функционала* $\mu \in K^*$ *существуют* $\alpha \ge 0$ *и* $l \in \partial\varphi$ *такие,что* $\mu = -\alpha l$ *.*

Доказательство. Если $\mu = 0$, то полагаем $\alpha = 0$, а $l \in \partial\varphi$ – любой. Поэтому далее считаем $\mu \ne 0$. По условию имеем:

$$\varphi(x) < 0 \Longrightarrow \mu(x) \ge 0\,. \tag{2.61}$$

В произведении $X \times R$ рассмотрим конусы:

$$\Omega_0 = \{(x,t) \mid \varphi(x) < t\}, \qquad \Omega = \{(x,t) \mid \mu(x) < 0,\ t = 0\}.$$

Ясно, что они непусты и выпуклы, причем конус Ω_0 открыт. Кроме того, $\Omega_0 \bigcap \Omega = \varnothing$. Действительно, если $(x,0)$ – их общий элемент, то $\varphi(x) < 0$ и $\mu(x) < 0$, что противоречит условию (2.61).

По теореме отделимости существует функционал, отделяющий Ω_0 от Ω, причем отрицательный на Ω_0 и неотрицательный на Ω, то есть существуют $l \in X^*$ и число β такие, что

$$\varphi(x) < t \Longrightarrow l(x) + \beta t < 0\,, \tag{2.62}$$

$$\mu(x) < 0 \Longrightarrow l(x) \geq 0\,. \tag{2.63}$$

Проанализируем условие (2.62). Положим $x = 0$, $t = 1$. Тогда из (2.62) вытекает, что $\beta < 0$, поэтому считаем, что $\beta = -1$. Тогда (2.62) приобретает вид:

$$\varphi(x) < t \implies l(x) < t \qquad \forall\, x, t,$$

откуда $l(x) \leq \varphi(x)\; \forall\, x$, т.е. $l \in \partial\varphi$.

Из условия (2.63) следует, что $l = -\alpha\mu$, где $\alpha \geq 0$. Если $\alpha = 0$, то $l = 0$, тогда $0 \in \partial\varphi$, следовательно, $\varphi(x) \geq 0\;\; \forall\, x$, что противоречит непустоте K. Поэтому $\alpha > 0$, и тогда $\mu = -\frac{1}{\alpha}\, l$, и теорема доказана. □

Верно и обратное утверждение: если $l \in \partial\varphi$ и $\alpha \geq 0$, то $\mu = -\alpha l \in K^*$. Действительно, если $x \in K$, то $l(x) \leq \varphi(x) < 0 \Longrightarrow -\alpha l(x) \geq 0 \Longrightarrow -\alpha l \in K^*$.

Таким образом, получаем

Следствие 4. *В условиях теоремы* $K^* = -\operatorname{con}(\partial\varphi)$, *где* $\operatorname{con} M = \bigcup\limits_{a \geq 0} \alpha M$ *— конус, натянутый на множество* M.

4. Теорема о несовместности системы строгих сублинейных неравенств и линейного равенства. Пусть X, Y – банаховы. Важную роль при анализе условия стационарности в негладких задачах с ограничениями играет следующая

Теорема 37. *Пусть* $\varphi_i(x) : X \mapsto \mathbb{R}$ *– сублинейные функционалы,* $i = 1, ..., k$, $G : X \mapsto Y$ *– линейный сюръективный оператор. Система условий*

$$\varphi_i(x) < 0, \quad i = 1, ..., k; \qquad Gx = 0, \tag{2.64}$$

несовместна тогда и только тогда, когда существуют числа $\alpha_1, ..., \alpha_k$ *и функционалы* $x_1^*, ..., x_k^*$ *из* X^*, *а также функционал* $y^* \in Y^*$ *такие, что*

$$\alpha_1 \geq 0, \;\ldots\; \alpha_k \geq 0, \qquad \sum_{i=1}^{k} \alpha_i > 0, \tag{2.65}$$

$$x_i^* \in \partial\varphi_i, \quad i = 1, ..., k, \tag{2.66}$$

$$\sum_{i=1}^{k} \alpha_i x_i^* + y^* G = 0. \tag{2.67}$$

Доказательство. а) Необходимость. Пусть система (2.64) несовместна. Рассмотрим сначала случай, когда среди конусов $\Omega_i = \{x \mid \varphi_i(x) < 0\}$, $i = 1, ..., k$ есть пустой, например, конус Ω_1 пуст. Тогда $\varphi_1(x) \geq 0\ \forall x$. Следовательно, $0 \in \partial\varphi_1$. Положим $x_1^* = 0$, а остальные x_i^* выберем произвольно из $\partial\varphi_i^*$ соответственно. Положим $\alpha_1 = 1$, а остальные $\alpha_i = 0$. Положим $y^* = 0$. Тогда набор $(\alpha_1, ..., \alpha_k,\, x_1^*, ..., x_k^*,\, y^*)$ удовлетворяет всем условиям (2.65)-(2.67).

Поэтому далее считаем, что все конусы Ω_i, $i = 1, ..., k$ непусты. Тогда, как мы знаем,

$$\Omega_i^* = -\operatorname{con}\partial\varphi_i, \qquad i = 1, ..., k. \tag{2.68}$$

Введем подпространство

$$L = \{x \mid Gx = 0\}.$$

В силу условия $GX = Y$ имеем:

$$L^* = G^*Y^* \tag{2.69}$$

(по теореме об аннуляторе ядра линейного сюръективного оператора).

Поскольку по условию $(\bigcap\limits_{i=1}^{k} \Omega_i) \bigcap L = \varnothing$, то по теореме Дубовицкого-Милютина о непересечении конусов существуют $p_i \in \Omega_i^*$, $\quad i = 1, ..., k$, $\quad q \in L^*$, не все равные нулю, такие, что $\sum\limits_{i=1}^{k} p_i + q = 0$.

Согласно (2.68), $p_i = -\alpha_i x_i^*$, где $\alpha_i \geq 0$, $\quad x_i^* \in \partial\varphi_i$, $\quad i = 1, ..., k$, а согласно (2.69), $q = -y^*G$, $\quad y^* \in Y^*$ (знак минус удобен).

Если $\alpha_i = 0\ \forall i$, то все p_i равны нулю, а тогда и $q = 0$, что противоречит условию нетривиальности набора $p_1, ..., p_k,\, q$. Следовательно $\sum\limits_{i=1}^{k} \alpha_i > 0$. Необходимость доказана.

б) Достаточность. Пусть существуют $\alpha_1, ..., \alpha_k$, $\quad x_1^*, ..., x_k^*$, $\quad y^*$, удовлетворяющие условиям (2.65)-(2.67), но тем не менее система (2.64) совместна, и пусть $\hat{x}$ – ее решение. Тогда

$$\langle x_i^*, \hat{x}\rangle \leq \varphi_i(\hat{x}) < 0 \quad \forall i, \qquad G\hat{x} = 0.$$

Поскольку $\sum\limits_{i=1}^{k} \alpha_i > 0$, то отсюда получаем $\sum\limits_{i=1}^{k} \alpha_i \langle x_i^*, \hat{x}\rangle + \langle y^*, G\hat{x}\rangle < 0,$
что противоречит (2.67). Теорема доказана. □

5. Негладкая задача с ограничениями равенства и неравенства. Условие стационарности. Вернемся к задаче $\mathcal{Z}_1$:

$$f_0(x) \longrightarrow \min; \qquad f_i(x) \leq 0, \quad i = 1, ..., k; \qquad g(x) = 0.$$

Мы изменим сделанные ранее предположения в этой задаче, предположив следующее. Пусть $U \subset X$ — открытое множество $x_0 \in U$ — допустимая ограничениями точка. Предполагается, что

(a) Все функционалы $f_i : U \longrightarrow \mathbb{R}$, $\quad i = 0, ..., k$ удовлетворяют условию Липшица на открытом множестве $U \subset X$.

(b) Каждый функционал f_i, $\quad i = 0, ..., k$ обладает в точке x_0 производной $f_i'(x_0, \bar{x})$ по любому направлению $\bar{x}$, причем отображение $\bar{x} \in X \longmapsto f_i'(x_0, \bar{x})$ есть сублинейный функционал на всем пространстве X .

(c) Оператор $g : U \longrightarrow Y$ *строго дифференцируем по Фреше в точке* x_0 *.*

(d) Образ $g'(x_0)X$ *замкнут в* Y *.*

В пункте (b) произошло усиление сделанных ранее предположений, а в пункте (d) — ослабление: ранее мы предполагали, что $g'(x_0)X = Y$.

Задачу $\mathcal{Z}_1$ с новыми предположениями будем называть *негладкой абстрактной задачей*, или **задачей** $\mathcal{Z}_C$. Она является абстрактным аналогом канонической задачи оптимального управления (задачи C), которую мы рассмотрим в следующей главе.

Через $\partial f_i'(x_0, \cdot)$ мы обозначаем множества опорных (субдифференциалы) к соответствующим сублинейным функционалам $f_i'(x_0, \cdot)$.

Теорема 38. *Пусть* $x_0 \in U$ *– точка локального минимума в задаче* $\mathcal{Z}_C$ *. Тогда существует набор множителей Лагранжа* $(\alpha_0, ..., \alpha_k,\ x_0^*, ..., x_k^*,\ y^*)$ *(где* α_i *– числа,* $x_i^* \in X^*$ *и* $y^* \in Y^*$ *– функционалы) такой, что выполнены условия:*

(i) неотрицательности: $\alpha_i \geq 0,\ i = 0, ..., k$ *;*

(ii) нетривиальности: $\sum\limits_{i=0}^{k} \alpha_i + \|y^*\| > 0$ *;*

(iii) дополняющей нежесткости: $\alpha_i f_i(x_0) = 0,\ i = 1, ..., k$ *;*

(iv) принадлежности: $x_i^* \in \partial f_i'(x_0, \cdot),\ i = 0, 1, ..., k$ *;*

(v) $\sum\limits_{i=0}^{k} \alpha_i x_i^* + y^* \circ g'(x_0) = 0$ *(уравнение Эйлера).*

Доказательство. а) Пусть $g'(x_0)X \neq Y$ (вырожденный случай). Поскольку образ $g'(x_0)X$ замкнут в Y , то по лемме о нетривиальности аннулятора найдется $y^* \in Y^*,\ y^* \neq 0$ такой, что $y^* g'(x_0) = 0$. Положим в этом случае $\alpha_i = 0\ \forall i$, а $x_i^* \in \partial f_i'(x_0, \cdot)$ выберем произвольно.

б) Пусть $g'(x_0)X = Y$. По теореме 32 система аппроксимаций

$$f_i'(x_0, \bar{x}) < 0, \quad i \in I; \quad g'(x_0)\bar{x} = 0$$

в задаче (2.52) несовместна по $\bar{x}$. Далее применяем теорему 37 о несовместности системы сублинейных неравенств и линейного равенства. Для $i \notin I$ полагаем $\alpha_i = 0$, а $x_i^* \in \partial f_i'(x_0, \cdot)$ выбираем произвольно. □

Теоремы 32 и 37 представляют собой основные два шага в исследовании абстрактной задачи по схеме Дубовицкого — Милютина: первый шаг состоит в переходе от локального минимума в задаче к непересечению конусных аппроксимаций всех ограничений в данной точке (теорема 32), а второй шаг — в записи факта непересечения этих конусных аппроксимаций в виде уравнения Эйлера относительно элементов из сопряженного пространства (теорема 37). Теорема 38 есть итоговый результат этих двух шагов; мы применим ее в следующей главе для получения условий слабого минимума в общей регулярной задаче оптимального управления.

Глава 3

Задача с фазовыми и регулярными смешанными ограничениями: условия стационарности

Мы переходим к изучению задач оптимального управления с фазовыми и регулярными смешанными ограничениями. В этой главе нашей целью будет получение необходимых условий слабого минимума (условий стационарности) в задаче вида

$$\mathcal{J} = F_0(x_0, x_1) \longrightarrow \min, \quad F_i(x_0, x_1) \le 0, \quad i = 1, \ldots, d(F); \tag{3.1}$$

$$\dot{x} = f(t, x, u), \qquad K(x_0, x_1) = 0, \tag{3.2}$$

$$g(t, x, u) = 0, \tag{3.3}$$

$$\varphi(t, x, u) \le 0, \qquad \Phi(t, x) \le 0\,. \tag{3.4}$$

Более точная постановка и все предположения приводятся ниже в §3.8. Новое в этой задаче — присутствие смешанных и фазовых ограничений (3.3), (3.4), которые являются ограничениями в пространствах $L_\infty(\Delta)$ и $C(\Delta)$. Поэтому сейчас мы остановимся на некоторых свойствах операторов и функционалов в этих пространствах. Но начнем с рассмотрения оператора, задающего ограничения равенства (3.2), (3.3).

3.1 Производная оператора равенств и замкнутость ее образа

1. Оператор Немыцкого и его производная. Пусть задано некоторое отображение $\eta : \mathbb{R}^{1+n} \longrightarrow \mathbb{R}^k$. Оно порождает оператор

$$N : \; C(\Delta, \mathbb{R}^n) \;\longrightarrow\; C(\Delta, \mathbb{R}^k),$$

действующий по правилу $x(t) \longmapsto \eta(t, x(t))$ (т.е. происходит подстановка функции $x(t)$ в функцию $\eta(t, x)$), который называется оператором Немыцкого. Мы сейчас установим, что если отображение η имеет непрерывную производную по x, то оператор N имеет производную Фреше, и она непрерывно зависит от точки в пространстве $C(\Delta)$.

Лемма 15. *Пусть* η *и ее производная* η_x *непрерывны на некотором открытом множестве* $\mathcal{D} \subset I\!R^{1+n}$, *и пусть функция* $x^0(t) \in C(\Delta, I\!R^n)$ *такова, что ее график лежит в* $\mathcal{D}$. *Тогда существует такое* $\varepsilon > 0$, *что для любой функции* $x(t)$, *лежащей в равномерной* $\varepsilon-$ *окрестности функции* $x^0(t)$, *оператор* N *имеет производную Фреше в точке* $x(\cdot)$

$$N'(x)\,\bar{x} \;=\; \eta_x(t,x(t))\,\bar{x}(t),$$

и она непрерывно (в операторной норме) зависит от $x(\cdot)$ *из указанной окрестности.*

Доказательство. По условию в каждой точке множества $\mathcal{D}$ функция η обладает разложением

$$\eta(t,\,x+\bar{x}) = \eta(t,x) + \eta_x'(t,x)\bar{x} + r(t,x,\bar{x}), \tag{3.5}$$

где

$$\frac{r(t,x,\bar{x})}{|\bar{x}|} \longrightarrow 0 \qquad \text{при} \quad \bar{x} \to 0.$$

Покажем, что стремление здесь равномерное по любому компакту $K = \{(t,x)\}$, лежащему в $\mathcal{D}$. Достаточно рассмотреть случай скалярной η.

Пусть $\varepsilon > 0$ таково, что $K + B_\varepsilon$ (замкнутое $\varepsilon-$ раздутие компакта K) также содержится в $\mathcal{D}$. Тогда при $(t,x) \in K$ и $|\bar{x}| \le \varepsilon$ точка $(t, x+\bar{x}) \in \mathcal{D}$, и по теореме о среднем имеем $\forall\, t$:

$$\eta(t,x+\bar{x}) - \eta(t,x) = \; \eta_x'(t,\,x_{cp}(t))\,\bar{x},$$

где $x_{cp}(t) -$ некоторая точка на отрезке $[x,\,x+\bar{x}]$. Отсюда и из (3.5) получаем

$$r(t,x,\bar{x}) = \eta(t,x+\bar{x}) - \eta(t,x) - \eta_x'(t,x)\,\bar{x} \;=$$

$$=\; \eta_x'(t,\,x_{cp}(t))\,\bar{x} - \eta_x'(t,\,x)\,\bar{x} \;=\; \big(\eta_x'(t,\,x_{cp}(t)) \;-\eta_x'(t,\,x)\big)\,\bar{x}\;.$$

Так как $x_{cp}(t) \to x$ равномерно по $(t,x) \in K$ (ибо $|x_{cp}(t) - x| \le |\bar{x}| \to 0$), а η_x' равномерно непрерывна на компакте $K + B_\varepsilon$, то $r(t,x,\bar{x})/|\bar{x}| \to 0$ равномерно по t, ч.т.д.

Обратимся теперь к оператору N. Так как график $x^0(t)$ лежит в $\mathcal{D}$, то существует такое $\varepsilon > 0$, что у любой функции $x(t)$, такой что $||x - x^0||_C \le 2\varepsilon$, график также лежит в $\mathcal{D}$. Обозначим через K замкнутую $\varepsilon-$ окрестность графика функции $x^0(t)$. Возьмем произвольную $x(t)$, график которой лежит в K и произвольную $\bar{x}(t)$ с условием $||\bar{x}||_C \le \varepsilon$. Тогда график функции $x(t) + \bar{x}(t)$ лежит в $\mathcal{D}$, и согласно (3.5) имеем $\forall\, t$:

$$\eta(t,\,x(t) + \bar{x}(t)) = \eta(t,x(t)) + \eta_x'(t,x(t))\,\bar{x}(t) + r(t,x(t),\bar{x}(t)).$$

Так как $\max|\bar{x}(t)| \to 0$, а $|r|/|\bar{x}(t)| \to 0$ равномерно по компакту K, то тем более $|r|/||\bar{x}||_C \to 0$ равномерно по компакту K, а это и означает, что линейный оператор $\bar{x}(t) \mapsto \eta_x(t,x(t))\,\bar{x}(t)$ есть производная Фреше оператора N в точке $x(\cdot)$.

Установим теперь непрерывность производной $N'(x)$. Достаточно установить непрерывность в точке $x^0(\cdot)$. Имеем

$$N'(x):\;\; \bar{x}(t) \longrightarrow \eta_x'(t,x(t))\,\bar{x}(t),$$

$$N'(x^0):\;\; \bar{x}(t) \longrightarrow \eta_x'(t,x^0(t))\,\bar{x}(t),$$

поэтому
$$||N'(x) - N'(x^0)|| = \max_t |\eta'_x(t, x(t)) - \eta'_x(t, x^0(t))|\,.$$
(Покажите!) Но последняя величина стремится к нулю при равномерном стремлении $x \implies x^0$, ибо η'_x равномерно непрерывна на компакте K (на замкнутой $\varepsilon-$ окрестности графика $x^0(t)$). Лемма доказана. □

Оператор Немыцкого можно рассматривать не только для пространства C, но и для L_∞ (и вообще для любых пространств ограниченных функций). Например, можно рассмотреть оператор
$$N:\; L_\infty(\Delta, \mathbb{R}^n) \longrightarrow L_\infty(\Delta, \mathbb{R}^k), \qquad u(t) \longmapsto \eta(t, u(t)).$$
Нетрудно показать, что лемма 15 останется справедливой и в этом случае (с заменой обозначения x на u), если в ней теперь потребовать, чтобы график $u^0(t)$ для почти всех t принадлежал некоторому компакту K, содержащемуся в $\mathcal{D}$.

Более того, как видно из доказательства, не обязательно требовать непрерывности η'_x по паре (t, x); достаточно предполагать, что $\eta'_x(t, x)$ непрерывна по x равномерно на любом компакте $K \subset \mathcal{D}$, т.е. что
$$\max_t |\eta'_x(t, x) - \eta'_x(t, y)| \longrightarrow 0 \qquad \text{при} \quad |x - y| \to 0, \;\; (t, x) \in K, \;\; (t, y) \in K.$$
Только это свойство и использовалось в доказательстве леммы 15.
Зависимость η от t при этом может быть произвольной измеримой.

Для наших целей потребуется оператор Немыцкого следующего вида:
$$N:\; C(\Delta, \mathbb{R}^n) \times L_\infty(\Delta, \mathbb{R}^r) \longrightarrow L_\infty(\Delta, \mathbb{R}^k), \qquad (x(t), u(t)) \longmapsto \eta(t, x(t), u(t)),$$
где функция η задана на открытом множестве $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^{1+n+r}$ и имеет на нем производные $\eta'_x\,, \eta'_u$, которые непрерывны по паре (x, u) равномерно на любом компакте в $\mathcal{D}$. Нетрудно проверить, что по аналогии с леммой 15 справедлива следующая

Лемма 16. *Пусть функции $x^0(t), u^0(t)$ таковы, что почти всюду на Δ график этой пары лежит в некотором компакте $K \subset \mathcal{D}$. Тогда $\exists\, \varepsilon > 0$ такое, что для любой пары $x(t), u(t)$, лежащей в равномерной $\varepsilon-$ окрестности пары $x^0(t), u^0(t)$, оператор N имеет производную Фреше*
$$N'(x, u)\,(\bar x, \bar u) \;=\; \eta'_x(t, x(t), u(t))\, \bar x(t) + \eta'_u(t, x(t), u(t))\, \bar u(t),$$
и она непрерывно (в операторной норме) зависит от пары (x, u) из указанной окрестности.

Отметим также следующий простой факт. Пусть X, Y, Z, W – банаховы пространства, и задан оператор $N: Y \to Z$, дифференцируемый по Фреше в точке y_0 . Пусть имеются вложения $\pi: X \to Y$ и $\rho: Z \to W$ (т.е. норма в X сильнее нормы в Y, а норма в Z сильнее нормы в W), и пусть $\pi\, x_0 = y_0$. Тогда оператор $\widetilde N(x) = \rho N(\pi x)$, отображающий $X \to W$, дифференцируем по Фреше в точке x_0 , и его производная имеет вид $\widetilde N'(x_0)\, \bar x \,=\, \rho\, N'(y_0)(\pi \bar x)$. Если N – оператор Немыцкого, то и $\widetilde N$ есть оператор Немыцкого (т.е. является оператором подстановки в функцию).

Эти соображения позволяют нам определять оператор Немыцкого не на пространстве $C(\Delta)$, а на пространстве $AC(\Delta)$, а его значения рассматривать не в пространстве $L_\infty(\Delta)$, а в пространстве $L_1(\Delta)$.

2. Производная оператора равенств. Рассмотрим теперь ограничения равенства (3.2), (3.3). Мы будем рассматривать их как равенство нулю оператора

$$G:\ AC(\Delta,\mathbb{R}^n)\times L_\infty(\Delta,\mathbb{R}^n)\ \longrightarrow\ L_1(\Delta,\mathbb{R}^n)\times L_\infty(\Delta,\mathbb{R}^{d(g)})\times\mathbb{R}^{d(K)},$$

действующего по правилу:

$$(x,u)\longmapsto(\ \dot{x}-f(t,x,u),\ \ g(t,x,u),\ \ K(x_0,\,x_1)\ ),$$

где, как всегда, обозначено $x_0=x(t_0),\ \ x_1=x(t_1)$. Будем предполагать, что функции f и g определены на некотором открытом множестве $\mathcal{D}_{t,x,u}\subset\mathbb{R}^{1+n+r}$ и удовлетворяют на нем предположениям леммы 16.

Пусть пара $(x(t),u(t))$ такова, что ее график п.в. содержится в некотором компакте в $\mathcal{D}_{t,x,u}$. Тогда по лемме 16 (с учетом вышеприведенного соображения) первые две компоненты оператора G имеют производную Фреше, которая действует по правилу:

$$(\bar{x},\bar{u})\longmapsto(\ \dot{\bar{x}}-f_x(t,x,u)\bar{x}-f_u(t,x,u)\bar{u},\ \ g_x(t,x,u)\bar{x}+g_u(t,x,u)\bar{u}\ ).$$

Относительно функции K будем предполагать, что она определена и непрерывно дифференцируема на некотором открытом множестве $\mathcal{D}_p\subset\mathbb{R}^{2n}$. Тогда третья компонента оператора G представляет собой композицию линейного оператора $(x,u)\mapsto(x(t_0),\,x(t_1))$ и гладкой функции конечномерного аргумента $(x_0,\,x_1)\mapsto K(x_0,\,x_1)$.
Если пара $(x(t),u(t))$ такова, что концы $(x_0,x_1)\in\mathcal{D}_p$, то очевидно, сквозной оператор $(x,u)\mapsto K(x_0,\,x_1)$ имеет производную Фреше

$$(\bar{x},\bar{u})\longmapsto K_{x_0}(x_0,x_1)\,\bar{x}_0+K_{x_1}(x_0,x_1)\,\bar{x}_1\,.$$

Итак, производная Фреше оператора G в точке (x,u) имеет вид:

$$(\bar{x},\bar{u})\longmapsto\begin{pmatrix}\dot{\bar{x}}-f_x(t,x,u)\bar{x}-f_u(t,x,u)\bar{u}\\ g_x(t,x,u)\bar{x}\ +\ g_u(t,x,u)\bar{u}\\ K_{x_0}(x_0,x_1)\,\bar{x}_0+K_{x_1}(x_0,x_1)\,\bar{x}_1\,)\end{pmatrix}.$$

Согласно общей теории (см. главу 2), нам надо удостовериться, что для исследуемой пары $(x^0(t),u^0(t))$ образ производной $G'(x^0,u^0)$ замкнут. Для этого мы будем использовать тот факт, что из предположений, которые будут сформулированы в $ 3.8, вытекает, что $s\times r-$ матрица $\Lambda(t)=g_u'(t,x^0(t),u^0(t)):\mathbb{R}^r\longrightarrow\mathbb{R}^s$ равномерно по $t\in\Delta$ имеет полный ранг, равный s. Поэтому остановимся сначала подробнее на данном свойстве.

3. Матрицы равномерно полного ранга. Пусть задана матрица $\Lambda(t):\mathbb{R}^r\longrightarrow\mathbb{R}^s$ с измеримыми ограниченными коэффициентами. Будем говорить, что она имеет на отрезке Δ *равномерно полный ранг*, если существует такое $a>0$, что для почти всех $t\in\Delta$ выполнено включение $\Lambda(t)\,D_1\supset D_a$, где D_a- замкнутый шар в соответствующем пространстве. (Ясно, что здесь обязательно $r\geq s$.) Предположим, что это свойство выполнено.

Введем подпространство $L(t)=\ker\Lambda(t)$, и пусть $M(t)$ есть его ортогональное дополнение в $\mathbb{R}^r$. Тогда очевидно, для п.в. $t\in\Delta$ суженное отображение $\Lambda(t):M(t)\to\mathbb{R}^s$ взаимно–однозначно, и более того, $\Lambda(t)(D_1\cap M(t))\supset D_a$. Отсюда вытекает, что это отображение имеет ограниченное обратное, т.е. существует измеримая ограниченная матрица $\Phi(t)\,:\;\mathbb{R}^s \to \mathbb{R}^r$ такая, что п.в. на Δ $\quad Im\,\Phi(t) = M(t)$ и $\Lambda(t)\,\Phi(t) = E_s$ – единичная матрица размера $s\times s$. Следовательно, $\Phi(t)$ есть правая обратная к $\Lambda(t)$. При этом $dim\,M(t) = s,\;\; dim\,L(t) = r-s$.

Так как подпространство $L(t)$ имеет постоянную размерность, то имеется измеримая ограниченная матрица $C(t)$ размера $(r-s)\times r$ такая, что любая измеримая ограниченная функция $\bar u_L(t)\in L(t)$ представима в виде $\bar u_L(t) = C(t)\,\bar v(t)$, где функция $\bar v(t)\in \mathbb{R}^{r-s}$ также измерима и ограничена.

Таким образом, любая измеримая ограниченная $\bar u(t)\in\mathbb{R}^r$ представима в виде

$$\bar u(t) = \;\Phi(t)\,\bar\sigma(t) + C(t)\,\bar v(t), \tag{3.6}$$

где $\bar\sigma(t)\in L^s_\infty\,,\quad \bar v(t)\in L^{r-s}_\infty$. Другими словами, управление разбивается на две части $\bar\sigma$ и $\bar v$ соответствующих размерностей.

Вернемся к нашему оператору G. Для того, чтобы установить замкнутость образа его производной $G'(x^0,u^0)$, покажем, что первые ее две компоненты имеют полный образ. Тогда при добавлении к ним третьей, конечномерной компоненты по лемме о замкнутости образа (см. $ 2.2) получим замкнутый образ.

Таким образом, нам осталось доказать следующий факт. Пусть задан линейный оператор

$$P:\; AC^n\times L^r_\infty \longrightarrow L^n_1\times L^s_\infty\,,$$

$$(\bar x,\bar u)\longmapsto (\;\dot{\bar x} - A(t)\bar x - B(t)\bar u,\;\;\Gamma(t)\bar x + \Lambda(t)\bar u\;),$$

где матрицы $A,\,B,\,\Gamma,\,\Lambda$ соответствующих размерностей измеримы и ограничены.

Лемма 17. *Пусть матрица* $\Lambda(t)$ *имеет ограниченную правую обратную* $\Phi(t)$. *Тогда оператор* P *действует "на".*

Доказательство. Возьмем произвольные $\bar\xi\in L^n_1,\;\bar\eta\in L^s_\infty$. Нам надо показать, что найдется такая пара $(\bar x,\bar u)$, для которой

$$\dot{\bar x} - A(t)\bar x - B(t)\bar u = \bar\xi\,, \tag{3.7}$$

$$\Gamma(t)\bar x + \Lambda(t)\bar u\; = \bar\eta\,. \tag{3.8}$$

Как показано выше, из условий леммы вытекает, что имеется представление (3.6). Подставив его в равенство (3.8), получим

$$\Gamma\bar x + \Lambda(\Phi\bar\sigma + C\bar v) = \bar\eta,$$

откуда с учетом равенства $\Lambda\Phi = E$ получим выражение σ через остальные переменные:

$$\bar\sigma = \;\bar\eta - \Lambda C\bar v - \Gamma\bar x.$$

Таким образом, независимым управлением осталась лишь компонента $\bar v$. При этом

$$\bar u = \;C\bar v + \Phi(\bar\eta - \Lambda C\bar v - \Gamma\bar x). \tag{3.9}$$

Подставив это выражение в (3.7), получаем

$$\dot{\bar x} - A\bar x + B\Phi\Gamma\bar x \;=\; B(C - \Phi\Lambda C)\bar v + B\Phi\bar\eta + \bar\xi\,.$$

Это линейное неоднородное уравнение относительно $\bar{x}$. Функции $\bar{\xi}$ и $\bar{\eta}$ у нас заданы, а $\bar{v}$ и $\bar{x}$ надо найти. Возьмем произвольное $\bar{v}(t)$ (например, $\bar{v} \equiv 0$), и произвольное начальное условие $\bar{x}(t_0)$, например, $\bar{x}(t_0) = 0$. Тогда выписанное уравнение имеет решение $\bar{x}(t)$ (причем единственное), после чего определяем $\bar{u}(t)$ по формуле (3.9). Найденные $\bar{x}(t), \bar{u}(t)$ очевидно дают решение системы (3.7), (3.8). Лемма доказана. $\Box$

3.2 Пространство $L_\infty(\Delta)$ и его сопряженное

Как мы уже знаем, каждому ограничению задачи должен соответствовать свой множитель Лагранжа, являющийся линейным функционалом над тем пространством, в которое действует данное ограничение. В задаче (3.1)–(3.4) присутствуют смешанные ограничения равенства (3.3) и неравенства (3.4), каждая компонента которых действует в пространство $L_\infty(\Delta)$; например,

$$(x(t), u(t)) \;\longrightarrow\; \varphi_i(t, x(t), u(t)) \;\in L_\infty(\Delta).$$

Множители Лагранжа, соответствующие этим ограничениям, есть линейные функционалы над пространством $L_\infty(\Delta)$. Поэтому нам надо познакомиться с некоторыми свойствами этого пространства и сопряженного к нему пространства $L_\infty^*(\Delta)$.

Напомним, что пространство $L_\infty(\Delta)$ состоит из всех измеримых ограниченных функций, заданных на множестве Δ (точнее, как и все пространства $L_p(\Delta)$, из классов эквивалентности по следующему отношению эквивалентности: две функции попадают в один класс, если они отличаются лишь на множестве меры нуль), и норма в этом пространстве есть

$$||u||_\infty = \operatorname*{vraimax}_{t\in\Delta} |u(t)| \;=\; \min\{c:\; |u(t)| \le c \quad \text{п.в. на } \Delta\}.$$

(В качестве Δ можно рассматривать любое измеримое подмножество числовой оси; у нас Δ есть отрезок.)

Пространство L_∞ качественно довольно сильно отличается от пространств L_p при $1 \le p < \infty$. Во-первых, оно несепарабельно (докажите — красивая задача!) и, как и пространство L_1, нерефлексивно. Норма в нем не является строго выпуклой. Важнейшим его свойством является тот факт, что само пространство L_∞ есть сопряженное пространство к L_1, поэтому в L_∞ удобно рассматривать слабую-* топологию (задающуюся функционалами из L_1). По теореме Алаоглу единичный шар в L_∞ есть слабый-* компакт. (Это обстоятельство является основой для большинства теорем существования в задачах оптимального управления.) Кроме того, так как L_1 сепарабельно, то на любом ограниченном множестве в L_∞ слабая-* топология метризуема, поэтому при изучении слабой-* сходимости элементов пространства L_∞ (а такая сходимость может иметь место только когда это множество элементов ограничено — теорема Банаха–Штейнгауза) можно рассматривать лишь слабо-* сходящиеся *последовательности* (а не направленности). В частности, единичный шар в L_∞ есть слабый-* *метрический* компакт (и, как всякий метрический компакт, обладает счетной базой).

(Отметим, что на всем пространстве L_∞ слабая-* топология не только не обладает счетной базой, но даже не удовлетворяет первой аксиоме счетности.)

Однако сопряженное к $L_\infty(\Delta)$ (в отличие от сопряженных к пространствам $L_p(\Delta)$ при $p < \infty$) имеет весьма непростую структуру. Во-первых, оно очевидно содержит пространство L_1 : любой элемент $l \in L_1(\Delta)$ задает линейный непрерывный функционал $L_\infty \to \mathbb{R}$ по правилу

$$u \longmapsto \int_\Delta l(t)\, u(t)\, dt. \tag{3.10}$$

Такие функционалы называются *регулярными* или *абсолютно непрерывными.*
Говорят также, что они имеют *интегральное представление.*

Однако, этим не исчерпываются все линейные функционалы над L_∞ : пространство L_∞^* шире пространства L_1 (можно даже сказать, гораздо шире). А именно, имеются такие функционалы, которые сосредоточены на множествах сколь угодно малой меры — т.н. *сингулярные* функционалы.

Напомним, что функционал $\lambda \in L_\infty^*(\Delta)$ называется *сосредоточенным на измеримом множестве* $E \subset \Delta$, если $\forall\, u \in L_\infty(\Delta)$

$$\lambda(u) = \lambda(\chi_E\, u), \qquad \text{или, что то же самое} \qquad \lambda(\chi_{E'}\, u) = 0,$$

где χ_M есть характеристическая функция множества M (равная 1 на M и 0 вне M), а E' – дополнение к E. Эквивалентное свойство: если $u(t) = 0$ п.в. на E, то $\lambda(u) = 0$. (Докажите!) Т.е. функционал λ реагирует только на значения функции $u(t)$ на множестве E, и не реагирует на ее значения на его дополнении.

Для регулярного функционала $l(t) \in L_1(\Delta)$ сосредоточенность на множестве E очевидно эквивалентна тому, что $l(t) = 0$ п.в. вне E .

Функционал $\lambda \in L_\infty^*(\Delta)$ называется *сингулярным*, если существует последовательность измеримых множеств $E_n \subset \Delta$, такая что $mes\, E_n \to 0$, и при этом λ сосредоточен на каждом E_n . (Ясно, что не ограничивая общности можно считать множества E_n вложенными друг в друга: $E_1 \supset E_2 \supset \dots$.)

Лемма 18. *Ненулевой сингулярный функционал не может быть представлен в виде (3.10).*

Доказательство. Допустим, что для некоторого ненулевого сингулярного λ, сосредоточенного на множествах E_n , $mes\, E_n \to 0$, имеется представление

$$\langle \lambda, u\rangle = \int_\Delta l(t)\, u(t)\, dt \qquad \forall\, u \in L_\infty. \tag{3.11}$$

Возьмем такое u, что $\langle \lambda, u\rangle \neq 0$. Тогда $\forall\, n$ будем иметь

$$\langle \lambda,\, \chi_{E_n} u\rangle \;=\; \int_{E_n} l(t)\, u(t)\, dt.$$

Так как $mes\, E_n \to 0$, то в силу абсолютной непрерывности интеграла Лебега правая часть стремится к нулю при $n \to \infty$, тогда как левая есть $\langle \lambda, u\rangle = \mathrm{const} \neq 0$, противоречие. □

Показать, что такие, на первый взгляд странные, функционалы существуют, можно, например, следующим образом. Пространство непрерывных функций $C(\Delta)$ есть, очевидно, замкнутое подпространство в $L_\infty(\Delta)$. Выберем любую точку $t_0 \in \Delta$ и рассмотрим линейный функционал $m : C(\Delta) \to \mathbb{R}$,

$$m(u) = u(t_0) \qquad (\delta - \text{функция Дирака}).$$

Ясно, что $||m||_C = 1$. По теореме Хана–Банаха функционал m имеет продолжение на все пространство $L_\infty(\Delta)$:

$$\tilde{m} :\ L_\infty(\Delta) \to \mathbb{R}$$

с сохранением нормы: $||\tilde{m}||_\infty = 1$.

Мы утверждаем, что построенный функционал $\tilde{m}$ сосредоточен в любой окрестности точки t_0 (в частности, на любом интервале, содержащем t_0), и поэтому, согласно лемме 18, не может быть представлен в виде (3.10).

Действительно, в противном случае найдется такое $\delta > 0$, что $\tilde{m}$ не сосредоточен на интервале $\omega = (t_0 - \delta, t_0 + \delta)$, т.е. $\exists\, u \in L_\infty$, такая что $\tilde{m}(\chi_{\omega'}\, u) = c > 0$, где $\omega' = \Delta \setminus \omega$. Не ограничивая общности считаем, что $u(t)$ сосредоточена вне ω и почти всюду $|u(t)| \le 1$. Возьмем теперь любую непрерывную функцию $v(t)$, равную нулю вне ω, у которой $v(t_0) = 1$ и всюду $|v(t)| \le 1$. Для нее по определению $\tilde{m}(v) = m(v) = 1$.

Рассмотрим теперь сумму $v + u$. В силу того, что функции v и u сосредоточены на непересекающихся множествах, имеем по-прежнему $|v(t)+u(t)| \le 1$ п.в., но при этом $\tilde{m}(v+u) = 1+c > 1$, что противоречит равенству $||\tilde{m}|| = 1$. Таким образом, функционал $\tilde{m}$ действительно сосредоточен на $(t_0 - \delta, t_0 + \delta)$, и тогда в силу произвольности $\delta > 0$ он сингулярен. $\Box$

Итак, в пространстве $L^*_\infty(\Delta)$ имеются регулярные функционалы, задающиеся элементами из $L_1(\Delta)$ по формуле (3.11), и сингулярные функционалы, сосредоточеные на множествах сколь угодно малой меры. Возникает естественный вопрос: какие еще элементы имеются в этом пространстве? Ответ на него дает следующая замечательная

Теорема 39 (Иосида–Хьюитт). *Любой элемент $\lambda \in L^*_\infty(\Delta)$ однозначно представим в виде*

$$\lambda = \ \lambda_a + \lambda_s\,,$$

где функционал λ_a абсолютно непрерывный (т.е. вида (3.10)), а $\lambda_s -$ сингулярный, т.е. сосредоточенный на некоторой последовательности множеств E_n, $mes\, E_n \to 0$. При этом

$$||\lambda|| = \ ||\lambda_a|| + ||\lambda_s||\,.$$

Если $\lambda \ge 0$, то $\lambda_a \ge 0$ и $\lambda_s \ge 0$; и если λ сосредоточен на некотором M, то λ_a и λ_s также сосредоточены на M.

Напомним, что функционал λ считается неотрицательным, если $\lambda(u) \ge 0$ для любой неотрицательной функции $u \in L_\infty(\Delta)$. Для такого функционала $||\lambda|| = \langle \lambda, \mathbf{1} \rangle$, где $\mathbf{1}(t) \equiv 1$ на Δ. Это вытекает из того факта, что $\mathbf{1}(t)$ мажорирует любую функцию из единичного шара в $L_\infty(\Delta)$.

Как мы видим, сингулярные функционалы задаются весьма неконструктивным образом, и поэтому работать с ними очень трудно. Если такие функционалы появляются в условиях стационарности (в уравнении Эйлера–Лагранжа), исследование существенно усложняется. Этим объясняется тот факт, что задачи с произвольными смешанными ограничениями до сих пор практически нигде не изучаются, хотя такие ограничения отнюдь не экзотичны. (Например, вполне естественное ограничение $x^2 + u^2 \le 1$ — нерегулярно.)

В 1960–70-х годах в серии работ А.Я. Дубовицкого и А.А. Милютина был предпринят поистине героический штурм этого, как выяснилось, неимоверно трудного препятствия, который в конце концов завершился успехом (см. [3, 4]). Однако ответ оказался совершенно неожиданным, а доказательство в силу своего необычайно большого объема было полностью опубликовано (в существенно улучшенном варианте) только недавно [23] и по своей сложности пока еще весьма далеко от широкой доступности. Более того, из-за своей совершенно оригинальной, нестандартной техники оно остается до сих пор не освоенным даже специалистами, за очень редким исключением.

В то же время имеется весьма широкий класс смешанных ограничений, для которых указанной проблемы сингулярных функционалов нет, ибо сингулярные составляющие в условиях стационарности отсутствуют, и тем самым исследование задачи кардинально упрощается. Это как раз смешанные ограничения с линейно-позитивно независимыми градиентами по управлению, которые мы назвали регулярными. Ниже в §3.6 мы установим этот факт, а пока займемся рассмотрением ограничений неравенства.

3.3 Производная по направлению функционала $\operatorname{vraimax} \varphi(t,x,u)$ и ее опорные.

Согласно общей схеме Дубовицкого–Милютина (см. главу 2), в задаче может присутствовать лишь конечное число ограничений неравенства. В нашей же задаче неравенства (3.4) должны выполняться для континуального множества значений t, т.е. фактически имеется бесконечное число неравенств. Однако их легко можно свести к конечному числу. Для этого введем функционалы $F_i : W \longrightarrow \mathbb{R}$,

$$F_i(w) = \operatorname*{vraimax}_{t\in\Delta} \varphi_i(t,x(t),u(t)), \qquad i = 1,\dots,d(\varphi).$$

Тогда каждое смешанное ограничение $\varphi_i(t,x(t),u(t)) \le 0$ эквивалентно одному скалярному неравенству $F_i(w) \le 0$. Аналогично поступим с фазовыми ограничениями $\Phi_s(t,x(t)) \le 0$, заменяя их на скалярные неравенства

$$G_s(w) = \max_{t\in\Delta} \Phi_s(t,x(t)) \le 0.$$

Плата за такое сведение состоит в том, что введенные функционалы F_i и G_s негладкие — они, вообще говоря, не имеют производной Фреше. (Хорошее упражнение: описать все точки, в которых у них есть производная Фреше.) Однако, как мы увидим, они имеют производную по любому направлению, и она сублинейна, а этого вполне достаточно для применения схемы Дубовицкого–Милютина. Перейдем к установлению этого факта.

Рассмотрим сначала более простой функционал.

1. Функционал $\operatorname{vraimax} v(t)$ **и его опорные.** Пусть $M \subset \Delta$ – произвольное измеримое множество положительной меры. Рассмотрим функционал $\Psi : L_\infty(\Delta) \to \mathbb{R}$,

$$\Psi(w) = \operatorname*{vraimax}_{t\in M} v(t), \tag{3.12}$$

где $v(t)$ есть скалярная функция из $L_\infty(\Delta)$. Отметим сразу, что этот функционал липшицев с константой 1, т.к. $\forall\, v_1, v_2 \in L_\infty$

$$|\Psi(v_2) - \Psi(v_1)| \le \operatorname*{vraimax}_{t\in M} |v_2(t) - v_1(t)| \le ||v_2 - v_1||_\infty .$$

Кроме того, он очевидно сублинеен. (Проверьте!) Опишем множество всех линейных функционалов $\lambda : L_\infty(\Delta) \longrightarrow \mathbb{R}$, опорных к Ψ.

Лемма 19. *Функционал* $\lambda(v)$ *из* L_∞^* *является опорным к функционалу* $\Psi(v)$ *(3.12) в том и только в том случае, когда*

(a) λ *сосредоточен на* M, *(т.е.* $v(t) = 0$ *на* $M \implies \lambda(v) = 0$ *);*

(b) $\lambda \ge 0$ *(т.е.* $v(t) \ge 0$ *п.в.* $\implies \lambda(v) \ge 0$ *);*

(c) $\lambda(\mathbf{1}) = 1$ *, где* $\mathbf{1}(t) \equiv 1$ *на* Δ *.*

Доказательство. Необходимость. Пусть $\lambda(v)$ – опорный к $\Psi(v)$, т.е. $\lambda(v) \le \operatorname*{vraimax}_M v(t) \quad \forall\, v \in L_\infty$.

(a) Покажем, что λ сосредоточен на M. Пусть $v(t) = 0$ на M. Тогда

$$\lambda(v) \le \operatorname*{vraimax}_M v = 0,$$

и точно так же

$$\lambda(-v) \le \operatorname*{vraimax}_M (-v) = 0,$$

откуда следует, что $\lambda(v) = 0$.

(b) Покажем, что $\lambda \ge 0$. Пусть $v(t) \ge 0$. Тогда $\lambda(-v) \le \operatorname*{vraimax}_M (-v) \le 0$. Следовательно, $\lambda(v) \ge 0$.

(c) Покажем, что $\lambda(\mathbf{1}) = 1$. Это следует из того, что

$$\lambda(\mathbf{1}) \le \operatorname*{vraimax}_M \mathbf{1} = 1,$$
$$\lambda(-\mathbf{1}) \le \operatorname*{vraimax}_M (-\mathbf{1}) = -1.$$

Достаточность. Пусть $\lambda \in L_\infty^*$ обладает свойствами (a), (b), (c). Покажем, что он является опорным к Ψ. Возьмем произвольную $v \in L_\infty$ и положим $v_M = v\chi_M$. Тогда $\lambda(v) = \lambda(v_M)$ в силу (a). Далее, обозначим $c = \operatorname*{vraimax}_M v(t)$. Тогда $v(t) \le c\,\mathbf{1}(t)$, т.е. $v(t) - c\,\mathbf{1}(t) \le 0$ на M, поэтому в силу (b) $\lambda(v - c\,\mathbf{1}) \le 0$, т.е. $\lambda(v) \le \lambda(c\,\mathbf{1}) = c\,\lambda(\mathbf{1}) = c$ (последнее равенство – в силу свойства (c)). Итак, $\lambda(v) \le \Psi(v)$. Отсюда в силу произвольности $v \in L_\infty(\Delta)$ следует, что $\lambda \in \partial\Psi$. □

2. Функционал $\lim \operatorname{vraimax} v(t)$ **и его опорные.** Пусть теперь имеется монотонная система $\{M_\delta\}_{\delta>0}$ измеримых множеств $M_\delta \subset \Delta$ положительной меры. Под монотонностью мы понимаем свойство: $0 < \delta_1 < \delta_2 \Longrightarrow M_{\delta_1} \subset M_{\delta_2}$ (система убывает при $\delta \to +0$).

Для каждого $\delta > 0$ рассмотрим сублинейный функционал в L_∞ :

$$\Psi_\delta(v) = \operatorname*{vraimax}_{M_\delta} v(t),$$

и определим функционал

$$\Psi_0(v) = \lim_{\delta\to+0} \Psi_\delta(v).$$

Ясно, что предел здесь существует (т.к. значение $\Psi_\delta(v)$ невозрастает при $\delta \to 0$ и ограничено снизу величиной $\operatorname{vraimin} v(t)$, и поэтому всегда $\operatorname{vraimin} v(t) \le \Psi_0(v) \le \Psi_\delta(v))$, и что этот предельный функционал также сублинеен и липшицев с константой 1. (Покажите это!)

Найдем множество его опорных $\partial\Psi_0$. Отметим, что по теореме 33 оно всегда непусто.

Лемма 20. *Имеет место равенство*

$$\partial\Psi_0 \;=\; \bigcap_{\delta>0} \partial\Psi_\delta\,. \tag{3.13}$$

Доказательство. Установим включение в обе стороны.
$(\supset)$ Пусть

$$\lambda \in \bigcap_{\delta>0} \partial\Psi_\delta, \qquad \text{т.е.} \qquad \lambda \in \partial\Psi_\delta \quad \forall\,\delta>0.$$

Возьмем произвольную $v \in L_\infty$. Тогда $\lambda(v) \le \Psi_\delta(v) \quad \forall\,\delta>0.$
Следовательно,

$$\lambda(v) \le \lim_{\delta\to+0} \Psi_\delta(v) = \Psi_0(v).$$

Итак, $\lambda(v) \le \Psi_0(v) \quad \forall\, v\in L_\infty,$ поэтому $\lambda \in \partial\Psi_0$.

$(\subset)$ Пусть $\lambda \in \partial\Psi_0$. Это означает, что для любого $v \in L_\infty$ справедливо неравенство $\lambda(v) \le \Psi_0(v)$. Но, как уже отмечалось, $\Psi_0(v) \le \Psi_\delta(v) \quad \forall\,\delta>0,$ поэтому при любом $\delta>0$ имеем $\lambda(v) \le \Psi_\delta(v) \quad \forall v.$ Следовательно, $\lambda \in \partial\Psi_\delta \quad \forall\delta>0,$ а тогда

$$\lambda \in \bigcap_{\delta>0} \partial\Psi_\delta, \qquad \text{ч.т.д.} \qquad \Box$$

Что собой представляет множество $\bigcap_{\delta>0} \partial\Psi_\delta$? Из полученных выше характеристик множеств $\partial\Psi_\delta$ при $\delta>0$ вытекает

Теорема 40. *Множество $\partial\Psi_0$ состоит из всех функционалов $\lambda \in L_\infty^*(\Delta)$, удовлетворяющих следующим трем условиям:*

(a) λ сосредоточен на каждом из множеств M_δ $(\delta>0)$,
т.е. $\lambda(v\chi_{M_\delta}) = \lambda(v)$ для любой $v\in L_\infty$ и любого $\delta>0$;

(b) $\lambda \ge 0$, т.е. $\lambda(v) \ge 0 \quad \forall v \in L_\infty,\ v\ge 0$;

(c) $\lambda(\mathbf{1}) = 1$, где $\mathbf{1}(t) \equiv 1$ на Δ .

Обратим внимание, что условие (a) не означает, что λ сосредоточен на пересечении всех M_δ (!). Например, $M_0 = \bigcap_{\delta>0} M_\delta$ может иметь нулевую меру, и тогда функционал $\lambda \in L_\infty^*$, сосредоточенный на M_0 есть просто нулевой функционал (ибо $v\chi_M = 0$ п.в.). В то же время функционал λ, удовлетворяющий условию (c), не является нулевым. Множество $\partial\Psi_0$ в этом случае целиком состоит из сингулярных функционалов.

3. Производная по направлению функционала $\mathrm{vraimax}\, v(t)$. Рассмотрим функционал $\Psi : L_\infty(\Delta) \to \mathbb{R}$,

$$\Psi(v) = \operatorname*{vraimax}_{t\in\Delta} v(t), \tag{3.14}$$

где $v(t)$ есть скалярная функция из $L_\infty(\Delta)$.
Фиксируем некоторую функцию $v^0(t)$, и для произвольной $\bar v(t) \in L_\infty(\Delta)$ вычислим производную по направлению $\Psi'(v^0, \bar v)$. Для удобства будем считать, что $\Psi(v^0) = 0$ (это не нарушает общности, т.к. добавление константы к $v^0(t)$ не меняет значения указанной производной). Тогда при любом $\delta > 0$ множество

$$M_\delta = \{t \in \Delta \mid v^0(t) \ge -\delta\}$$

имеет положительную меру.

Теорема 41. *Для любой $\bar v(\cdot) \in L_\infty(\Delta)$ функционал (3.14) имеет в точке v^0 производную по направлению $\bar v$, которая определяется равенством*

$$\Psi'(v^0, \bar v) = \lim_{\delta\to+0} \operatorname*{vraimax}_{t\in M_\delta} \bar v(t)\,. \tag{3.15}$$

Доказательство. Пусть $||\bar v||_\infty = C$. Зафиксируем на время любое $\delta > 0$. Так как вне M_δ по определению $v^0(t) < -\delta$, то при $\varepsilon C < \delta/2$ вне M_δ будет $v^0 + \varepsilon\bar v < -\delta/2$, а на M_δ в силу липшицевости с константой 1 функционала $\Psi_\delta(v) = \mathrm{vraimax}_{M_\delta}\, v(t)$ получим

$$\operatorname*{vraimax}_{M_\delta} (v^0(t) + \varepsilon\bar v(t)) \ \ge\ \operatorname*{vraimax}_{M_\delta} v^0(t) - \varepsilon C \ >\ -\frac{\delta}{2}\,.$$

Отсюда следует, что при $\varepsilon C < \delta/2$

$$\operatorname*{vraimax}_{\Delta} (v^0(t) + \varepsilon\bar v(t)) \ =\ \operatorname*{vraimax}_{M_\delta} (v^0(t) + \varepsilon\bar v(t))\,.$$

Учитывая, что $v^0(t) \le 0$ на Δ, получаем при $\varepsilon C < \delta/2$:

$$\Psi(v^0 + \varepsilon\bar v) = \operatorname*{vraimax}_{M_\delta} (v^0 + \varepsilon\bar v) \ \le\ \varepsilon \cdot \operatorname*{vraimax}_{M_\delta} \bar v(t).$$

Отсюда $\forall\,\delta > 0$ имеем

$$\limsup_{\varepsilon\to0+} \frac{\Psi(v^0 + \varepsilon\bar v)}{\varepsilon} \ \le\ \operatorname*{vraimax}_{M_\delta} \bar v(t),$$

и поэтому

$$\limsup_{\varepsilon\to0+} \frac{\Psi(v^0 + \varepsilon\bar v)}{\varepsilon} \ \le\ \lim_{\delta\to0+} \operatorname*{vraimax}_{M_\delta} \bar v(t). \tag{3.16}$$

Но с другой стороны, $\forall\,\varepsilon > 0$, $\forall\,\delta > 0$ очевидно

$$\Psi(v^0 + \varepsilon\bar v) \ \ge\ \operatorname*{vraimax}_{M_\delta} (v^0 + \varepsilon\bar v) \ \ge\ -\delta + \operatorname*{vraimax}_{M_\delta} (\varepsilon\,\bar v(t)),$$

поэтому при $\delta = \varepsilon^2$ получаем

$$\Psi(v^0 + \varepsilon\bar v) \ \ge\ -\varepsilon^2 + \varepsilon \cdot \operatorname*{vraimax}_{M_{\varepsilon^2}} \bar v,$$

откуда

$$\liminf_{\varepsilon\to 0+} \frac{\Psi(v^0+\varepsilon\bar v)}{\varepsilon} \;\ge\; \lim_{\varepsilon\to 0+} \operatorname*{vraimax}_{M_{\varepsilon^2}} \bar v(t). \qquad (3.17)$$

Сравнивая (3.16) и (3.17), правые части которых очевидно равны (почему?), приходим к тому, что существует предел

$$\lim_{\varepsilon\to 0+} \frac{\Psi(v^0+\varepsilon\bar v)}{\varepsilon} \;=\; \lim_{\delta\to 0+} \operatorname*{vraimax}_{M_\delta} \bar v(t),$$

который по определению и есть $\Psi'(v^0,\bar v)$. □

Согласно теореме 40, множество опорных к функционалу (3.15) состоит из всех $\lambda\in L^*_\infty(\Delta)$, удовлетворяющих указанным в ней условиям a), b), c).

Если рассмотреть функционал $\Psi_M(v)=\operatorname*{vraimax}_{t\in M} v(t)$, где M – измеримое множество положительной меры в Δ, то его производная по направлению будет выражаться той же формулой (3.15) с тем лишь очевидным изменением, что теперь множества M_δ содержатся в M : $M_\delta = \;\{t\in M \;\mid\; v^0(t)\ge -\delta\}$.

4. Производная по направлению функционала vraimax $\varphi(t,x,u)$. Рассмотрим теперь функционал

$$F(w) = \;\operatorname*{vraimax}_{t\in\Delta}\, \varphi(t,w(t)),$$

где $\varphi(t,w) : \mathcal Q \to \mathbb R$ определена и непрерывна на открытом множестве $\mathcal Q\subset \mathbb R^{1+n+r}$ вместе со своими своими производными φ_x и φ_u . Пусть $w^0(\cdot) = (x^0(\cdot),u^0(\cdot)) \in W$ такова, что ее график почти всюду содержится в некотором компакте, лежащем в $\mathcal Q$. Как и раньше, считаем, что $F(w^0)=0$ и введем множества

$$M_\delta = \;\{t\in\Delta \;\mid\; \varphi(t,w^0(t)) \;\ge\; -\delta\,\},$$

которые при всех $\delta>0$ имеют положительную меру.

Очевидно, $F(w)=\Psi(N(w))$, где Ψ задан формулой (3.14), а

$$N:\; W\longrightarrow L_\infty(\Delta), \qquad w=(x,u)\longmapsto \varphi(t,x(t),u(t)),$$

есть оператор Немыцкого. Так как последний дифференцируем по Фреше в точке w^0, а Ψ имеет в точке $v^0=N(w^0)$ производную по любому направлению $\bar v\in L_\infty(\Delta)$, то по теореме о производной сложной функции их композиция F в точке w^0 также имеет производную по любому направлению $\bar w(\cdot)\in W$, которая определяется равенством

$$F'(w^0,\bar w) = \lim_{\delta\to +0}\, \operatorname*{vraimax}_{t\in M_\delta} \langle \varphi'_w(t,w^0(t)),\bar w(t)\rangle. \qquad (3.18)$$

(Проверьте!) Ясно, что функционал $F'(w^0,\bar w)$ сублинеен по $\bar w$. Чтобы описать опорные функционалы к нему, введем линейный оператор

$$A:\; W\longrightarrow L_\infty(\Delta,\mathbb R),$$

переводящий $\bar w\in W$ в элемент $\bar v(t)=\varphi'_w(t,w^0(t))\,\bar w(t)\in L_\infty$.

Тогда $F'(w^0,\bar w)=\Psi_0(A\,\bar w)$. Согласно полученной ранее формуле (2.58) имеем:

$$\partial F'(w^0,\cdot\,) \;=\; A^*\,\partial\Psi_0\,.$$

Отсюда и из теоремы 40, характеризующей $\partial\Psi_0$, вытекает следующая

Теорема 42. *Множество опорных к сублинейному функционалу* $\bar{w} \longmapsto F'(w^0, \bar{w})$ *состоит из всех функционалов* $l \in W^*$, *имеющих представление* $l(\bar{w}) = \lambda\,(\varphi'_w(t, w^0(t))\,\bar{w})$, *где* $\lambda \in \partial\Psi_0$, *т.е.* λ *есть функционал из* $L^*_\infty(\Delta)$, *обладающий свойствами (a), (b), (c) теоремы 40.*

Наконец, покажем, что функционал

$$F(w) \;=\; \operatorname*{vraimax}_{\Delta} \varphi(t, w(t))$$

удовлетворяет условию Липшица по w в некоторой окрестности точки $w^0 \in W$. Действительно, функция $\varphi(t, w)$ имеет производную по w, непрерывную на открытом множестве $\mathcal{Q}$. Следовательно, на каждом компакте $K \subset \mathcal{Q}$ она удовлетворяет условию Липшица по w с некоторой константой $L = L(K)$. Сублинейный функционал $v \in L_\infty \mapsto \operatorname*{vraimax}_{\Delta} v(t)$ липшицев во всем пространстве L_∞ с константой 1. Следовательно, для любых измеримых ограниченных $w_1(t), w_2(t)$, графики которых лежат в K, имеем:

$$|F(w_1) - F(w_2)| \;\le\; \|\varphi(t, w_1) - \varphi(t, w_2)\|_\infty \;\le\; L\|w_1 - w_2\|_\infty\,,$$

Так как график функции $w^0(t)$ п.в. лежит в некотором компакте $K_0 \subset \mathcal{Q}$, то при некотором $\varepsilon > 0$ замкнутое $\varepsilon-$ раздутие K_ε этого компакта также содержится в $\mathcal{Q}$, а тогда для любых функций $w_1(t), w_2(t)$ из равномерной $\varepsilon-$ окрестности $w^0(t)$ (т.е. $\varepsilon-$ окрестности в пространстве $L_\infty^{d(w)}$) справедлива оценка

$$|F(w_1) - F(w_2)| \;\le\; L\|w_1 - w_2\|_\infty\,.$$

Поскольку $\|w\|_\infty$ оценивается сверху нормой $\|w\|$ в W, то отсюда следует липшицевость F на $\varepsilon-$ окрестности точки w^0 в нашем пространстве W .

3.4 Производная по направлению функционала $\max \Phi(t, x)$ и ее опорные.

Рассмотрения, проводимые в этом параграфе, во многом повторяют рассмотрения предыдущего параграфа. Поэтому мы опускаем очевидные детали, а также доказательства двух фактов, относящихся скорее к функциональному анализу, чем непосредственно к теории экстремума. Как и в предыдущем параграфе, мы начнем с рассмотрения частного случая функционала, указанного в заглавии.

1. Функционал $\max y(t)$ **и его опорные.** Пусть $M \subset \Delta -$ произвольное непустое замкнутое множество. Рассмотрим функционал $\Theta :\, C(\Delta) \to \mathbb{R}$,

$$\Theta(y) = \max_{t \in M} y(t), \tag{3.19}$$

где $y(t)$ есть скалярная функция из $C(\Delta)$. Этот функционал липшицев с константой 1, т.к. $\forall\, y_1, y_2 \in C(\Delta)$

$$|\Theta(y_2) - \Theta(y_1)| \le \max_{t \in M} |y_2(t) - y_1(t)| \;\le\; ||y_2 - y_1||_C\,.$$

Кроме того, он очевидно сублинеен. Опишем множество всех линейных функционалов $\lambda : C(\Delta) \longrightarrow \mathbb{R}$, опорных к Θ.

Согласно теореме Рисса, произвольный линейный функционал λ над пространством $C(\Delta)$ имеет вид

$$\lambda(y) = \int\limits_{\Delta} y(t)\, d\mu,$$

где $d\mu$ есть мера Стильтьеса на отрезке Δ, заданная с помощью некоторой функции ограниченной вариации $\mu(t)$. Соответствие между мерами и функциями ограниченной вариации становится взаимно-однозначным, если, например, считать, что функция $\mu(t)$ непрерывна слева, а также задать в точке t_1 ее "правое предельное значение" $\mu(t_1+0)$. Тогда скачок $\mu(t_1+0)-\mu(t_1)$ есть мера одноточечного множества $\{t_1\}$ (в соответствии с тем, что мера отрезка $[\tau_1, \tau_2]$ есть $\mu(\tau_2+0)-\mu(\tau_1)$; вспомните также определения меры интервала и мер полуинтервалов). *Неотрицательная* мера (т.е. мера, принимающая неотрицательные значения) задается при помощи монотонно неубывающей функции $\mu(t)$ и величины $\mu(t_1+0)$, не меньшей, чем $\mu(t)$ для всех $t \in \Delta$. Линейный функционал $\lambda : C(\Delta) \to \mathbb{R}$ называется *неотрицательным*, если он принимает неотрицательные значения на конусе неотрицательных функций. Нам потребуется следующий известный факт: *функционал λ является неотрицательным тогда и только тогда, когда соответствующая ему мера $d\mu$ неотрицательна.*

Напомним также, что мера называется *вероятностной*, если она неотрицательна и мера всего отрезка Δ есть 1.

Линейный функционал $\lambda : C(\Delta) \to \mathbb{R}$ называется *сосредоточенным на множестве* M, если $\lambda(y) = 0$ для любой непрерывной функции $y(t)$, равной нулю на M. Это эквивалентно тому, что соответствующая мера также является сосредоточенной на M (последнее означает, что мера любого измеримого множества, не пересекающегося с M, равна нулю). Данное утверждение нам также понадобится.

Лемма 21. *Функционал $\lambda(y) = \int\limits_{\Delta} y(t)\, d\mu$ из $C^*(\Delta)$ является опорным к функционалу $\Theta(y)$ (3.19) в том и только в том случае, когда мера $d\mu$ удовлетворяет следующим условиям:*

(a) $d\mu$ *сосредоточена на* M;

(b) $d\mu \geq 0$;

(c) $\int\limits_{\Delta} d\mu = 1$, *т.е.* $\mu(t_1+0) - \mu(t_0-0) = 1$.

Доказательство повторяет доказательство леммы 19. Необходимость. Пусть $\lambda(y)$ – опорный к $\Theta(y)$, т.е. $\lambda(y) \leq \max\limits_{M} y(t) \quad \forall\, y \in C(\Delta)$.

(a) Покажем, что λ сосредоточен на M. Пусть $y(t) = 0$ на M. Тогда

$$\lambda(y) \leq \max_{M} y = 0,$$

и точно так же

$$\lambda(-y) \leq \max_{M}\,(-y) = 0,$$

откуда следует, что $\lambda(y) = 0$. Значит, λ сосредоточен на M, а тогда и мера $d\mu$ сосредоточена на M.

(b) Покажем, что $\lambda \geq 0$. Пусть $y(t) \geq 0$. Тогда $\lambda(-y) \leq \max\limits_{M}(-y) \leq 0$. Следовательно, $\lambda(y) \geq 0$. Из условия $\lambda \geq 0$ вытекает, что $d\mu \geq 0$.

(c) Покажем, что $\lambda(\mathbf{1}) = 1$, где $\mathbf{1}(t) \equiv 1$. Это следует из того, что

$$\lambda(\mathbf{1}) \leq \max_{M} \mathbf{1} = 1,$$
$$\lambda(-\mathbf{1}) \leq \max_{M}(-\mathbf{1}) = -1.$$

Достаточность. Пусть $\lambda(y) = \int\limits_{\Delta} y(t)\, d\mu$ обладает свойствами (a), (b), (c). Покажем, что он опорный к Θ. Возьмем произвольную $y \in C(\Delta)$ и положим $c = \max\limits_{M} y(t) = \Theta(y)$. Тогда $y(t) - c \leq 0$ на M, поэтому в силу (a) и (b) $\int\limits_{\Delta}(y(t) - c)\, d\mu \leq 0$, т.е. $\lambda(y) := \int\limits_{\Delta} y(t)\, d\mu \leq c\int\limits_{\Delta} d\mu = c$ (последнее равенство – в силу свойства (c)). Итак, $\lambda(y) \leq \Theta(y)$. Отсюда в силу произвольности $y \in C(\Delta)$ следует, что $\lambda \in \partial\Theta$. □

2. Производная по направлению функционала $\max y(t)$. Рассмотрим функционал $\Theta : C(\Delta) \to \mathbb{R}$,

$$\Theta(y) = \max_{t\in\Delta} y(t), \tag{3.20}$$

где $y(t)$ есть скалярная функция из $C(\Delta)$.
Фиксируем некоторую функцию $y^0(t)$, и для произвольной $\bar{y}(t) \in C(\Delta)$ вычислим производную по направлению $\Theta'(y^0, \bar{y})$. Как и раньше, без нарушения общности считаем, что $\Theta(y^0) = 0$. Тогда замкнутое множество

$$M_0 = \{t \in \Delta \mid y^0(t) = 0\} \qquad \text{непусто.}$$

Теорема 43. *Для любой* $\bar{y}(\cdot) \in C(\Delta)$ *функционал* $\Theta(y)$ *(3.20) имеет в точке* y^0 *производную по направлению* $\bar{y}$ *, которая определяется равенством*

$$\Theta'(y^0, \bar{y}) = \max_{t\in M_0} \bar{y}(t)\,. \tag{3.21}$$

Доказательство. Заметим, что функционал $\Theta(y)$ есть сужение функционала $\Psi : L_\infty(\Delta) \to \mathbb{R}$, рассмотренного в §3.3, на пространство $C(\Delta) \subset L_\infty(\Delta)$. Поэтому $\forall\, y^0,\, \bar{y} \in C(\Delta)$

$$\Theta'(y^0, \bar{y}) \;=\; \Psi'(y^0, \bar{y}), \tag{3.22}$$

и мы можем воспользоваться теоремой 41, согласно которой

$$\Psi'(y^0, \bar{y}) = \lim_{\delta\to+0}\, \operatorname*{vraimax}_{t\in M_\delta} \bar{y}(t)\,, \tag{3.23}$$

где $M_\delta = \{t \in \Delta \mid y^0(t) \geq -\delta\,\}$. Но поскольку функция y^0 непрерывна, то все множества M_δ замкнуты, а в силу непрерывности $\bar{y}$

$$\operatorname*{vraimax}_{M_\delta} \bar{y}(t) \;=\; \max_{M_\delta} \bar{y}(t). \tag{3.24}$$

Наконец, так как $\bigcap_{\delta>0} M_\delta \;= M_0$, то

$$\lim_{\delta\to+0}\, \max_{t\in M_\delta} \bar{y}(t) \;=\; \max_{t\in M_0} \bar{y}(t). \tag{3.25}$$

Действительно, неравенство $\geq$ очевидно в силу того, что $M_\delta \supset M_0 \quad \forall\, \delta > 0$. Для доказательства обратного неравенства надо взять любую последовательность $\delta_n \to 0$ и соответствующую точку $t_n \in M_{\delta_n}$, реализующую максимум $\bar y(t)$ по M_{δ_n}. Считая без нарушения общности, что $t_n \to t_0$, получаем $t_0 \in M_0$, и $\lim \bar y(t_n) = \bar y(t_0)$, откуда следует неравенство $\leq$ в (3.25). Из полученных равенств (3.22), (3.23), (3.24) и (3.25) вытекает требуемая формула (3.21). □

Согласно лемме 21, множество опорных к функционалу (3.21) состоит из всех вероятностных мер $d\mu$, сосредоточенных на M_0.

Если рассмотреть функционал $\Theta_M(y) = \max\limits_{t\in M} y(t)$, где M – замкнутое множество в Δ, то его производная по направлению будет выражаться той же формулой (3.21) с тем лишь очевидным изменением, что теперь множество M_0 содержится в M:

$$M_0 = \{t \in M \mid y^0(t) = 0\}.$$

3. Производная по направлению функционала $\max \Phi(t,x)$. Рассмотрим теперь в пространстве $C(\Delta, \mathbb{R}^n)$ n-мерных непрерывных вектор-функций $x(t)$ функционал

$$F(x) = \max_{t\in\Delta} \Phi(t, x(t)),$$

где функция $\Phi(t,x) : \mathcal{Q}_1 \to \mathbb{R}$ определена на некотором открытом множестве $\mathcal{Q}_1 \subset \mathbb{R}^{1+n}$ и непрерывна на $\mathcal{Q}_1$ вместе со своей производной Φ_x. Пусть $x^0(\cdot) \in C(\Delta, \mathbb{R}^n)$ такова, что ее график целиком лежит в $\mathcal{Q}_1$. Как и раньше, считаем $F(x^0) = 0$ и введем замкнутое непустое множество

$$M_0 = \{t \in \Delta \mid \Phi(t, x^0(t)) = 0\}. \tag{3.26}$$

Очевидно, $F(x) = \Theta(N(x))$, где Θ задан формулой (3.20), а

$$N :\ C(\Delta, \mathbb{R}^n) \longrightarrow C(\Delta, \mathbb{R}), \qquad x \longmapsto \Phi(t, x(t)),$$

есть оператор Немыцкого. Так как последний дифференцируем по Фреше в точке x^0, а Θ имеет в точке $y^0 = N(x^0)$ производную по любому направлению $\bar y \in C(\Delta, \mathbb{R})$, то по теореме о производной сложной функции их композиция F в точке x^0 также имеет производную по любому направлению $\bar x \in C(\Delta, \mathbb{R}^n)$, которая определяется равенством

$$F'(x^0, \bar x) = \max_{t\in M_0} \left(\Phi_x'(t, x^0(t))\, \bar x(t)\right). \tag{3.27}$$

Ясно, что функционал $F'(x^0, \bar x)$ сублинеен по $\bar x$. Чтобы описать опорные функционалы к нему, введем линейный оператор

$$A :\ C(\Delta, \mathbb{R}^n) \longrightarrow C(\Delta, \mathbb{R}),$$

переводящий $\bar x \in C(\Delta, \mathbb{R}^n)$ в элемент $\bar y(t) = \Phi_x'(t, x^0(t))\, \bar x(t) \in C(\Delta, \mathbb{R})$.

Тогда $F'(x^0, \bar x) = \Theta(A\, \bar x)$. Согласно полученной ранее формуле (2.58) имеем:

$$\partial F'(x^0, \cdot\,) \ = \ A^*\, \partial\Theta\,.$$

Отсюда и из леммы 21, характеризующей $\partial\Theta$, вытекает следующая

Теорема 44. *Множество опорных к сублинейному функционалу* $\bar{x} \longmapsto F'(x^0, \bar{x})$ *(3.27) состоит из всех функционалов* $l \in C^*(\Delta, \mathbb{R}^n)$, *имеющих представление*

$$l(\bar{x}) = \int\limits_{\Delta} \Phi'_x(t, x^0(t))\, \bar{x}(t)\, d\mu,$$

где $d\mu$ *есть вероятностная мера, сосредоточенная на множестве* M_0 *(3.26).*

Наконец, точно так же, как и в предыдущем §3.3, нетрудно показать, что функционал

$$F(x) = \max_{\Delta} \Phi(t, x(t))$$

удовлетворяет условию Липшица по x в некоторой окрестности точки $x^0 \in C(\Delta, \mathbb{R}^n)$.

4. Формула интегрирования по частям. Остановимся еще на одном вопросе, связанном с интегралом Лебега–Стилтьеса. Нам понадобится формула интегрирования по частям.

Напомним сначала, что для любой непрерывной функции $\gamma(t)$ и любой меры $d\mu$ (произвольного знака) на отрезке Δ их произведение $\gamma(t)\, d\mu(t)$ есть линейный функционал над $C(\Delta)$:

$$x(t) \longmapsto \int_{\Delta} x(t)\, \gamma(t)\, d\mu(t),$$

который задается некоторой новой мерой $d\Gamma(t) = \gamma(t)\, d\mu(t)$, где

$$\Gamma(t) = \int\limits_{[t_0 - 0,\, t+0]} \gamma(t)\, d\mu(t)$$

есть функция ограниченной вариации. (Интеграл Стилтьеса по отрезку $[a-0,\, b+0]$ означает, что при его вычислении следует учитывать возможный скачок меры в концах отрезка. Такой интеграл не зависит от того, с какой стороны непрерывна функция $\mu(t)$.)

Итак, пусть заданы некоторые γ, $d\mu$.

Теорема 45. *Для любой абсолютно непрерывной функции* $x(t)$ *справедлива формула*

$$\int\limits_{[t_0 - 0,\, t_1+0]} x(t)\, \gamma(t)\, d\mu(t) = x\, \Gamma \Big|_{t_0 - 0}^{t_1 + 0} - \int\limits_{t_0}^{t_1} \dot{x}(t)\, \Gamma(t)\, dt. \tag{3.28}$$

Эта формула вытекает из общей формулы интегрирования по частям для интеграла Стилтьеса (см. [13, с. 215]), но для удобства читателя мы дадим здесь независимое доказательство. Отметим также, что не уменьшая общности можно полагать $\gamma(t) \equiv 1$ (поскольку $\gamma\, d\mu = d\Gamma$), но в целях дальнейшего применения мы приводим эту формулу для произвольной непрерывной $\gamma(t)$.

Доказательство. Если $\mu(t)$ – абсолютно непрерывная функция: $d\mu(t) = l(t)\, dt$, где $l \in L_1(\Delta)$, то требуемая формула превращается в обычную формулу интегрирования по частям для интеграла Лебега. Как известно, абсолютно непрерывные меры слабо-* плотны в $BV(\Delta)$ (покажите!), т.е. для любой меры $d\mu \in BV(\Delta)$ существует последовательность абсолютно непрерывных мер $d\mu_n(t) = l_n(t)\,dt$, где $l_n \in L_1(\Delta)$, таких что любой непрерывной функции $z(t)$

$$\int_\Delta z\,d\mu_n \;\longrightarrow\; \int_\Delta z\,d\mu. \tag{3.29}$$

Поэтому $\forall n$ имеем равенство

$$\int_\Delta x\,\gamma\,l_n\,dt = \;x\,\Gamma_n\Big|_{t_0}^{t_1} \;-\int_\Delta \dot x\,\Gamma_n\,dt, \tag{3.30}$$

где $\Gamma_n(t) = \int\limits_{t_0}^{t} \gamma(\tau)\,l_n(\tau)\,d\tau$ – абсолютно непрерывная функция, и $\forall t$

$$\Gamma_n(t) \longrightarrow \int\limits_{[t_0-0,\,t+0]} \gamma(t)\,d\mu(t) \;=\; \Gamma(t). \tag{3.31}$$

Так как меры $d\mu_n = l_n\,dt$ слабо-* сходятся, то их нормы $||d\mu_n|| = ||l_n||_1$ в совокупности ограничены (теорема Банаха–Штейнгауза), поэтому $\forall t,\ n$ имеем $|\Gamma_n(t)| \le \mathrm{const}$. Из (3.29), (3.31) и теоремы Лебега (о предельном переходе в интеграле Лебега) вытекает, что в пределе равенство (3.30) превращается в требуемое равенство (3.28). $\square$

3.5 Линейно–позитивно независимые системы вектор-функций

1. Напомним, что набор элементов $h_1,\ldots,h_\nu$ некоторого векторного пространства называется *линейно независимым*, если не существует набора коэффициентов $\lambda_1,\ldots,\lambda_\nu$ таких, что $\sum|\lambda_i| > 0$ и $\sum \lambda_i h_i = 0$, и называется *позитивно независимым*, если не существует набора коэффициентов $\lambda_1 \ge 0,\ldots,\lambda_\nu \ge 0$, для которых выполнены указанные два условия (т.е. выпуклая оболочка данных векторов не содержит нуля).

Отметим существенную разницу между этими свойствами. В пространстве $\mathbb{R}^r$ число векторов в любом линейно независимом наборе не превосходит r, тогда как число *позитивно* независимых векторов может быть сколь угодно большим. (Покажите!)

Будем считать, что в $\mathbb{R}^r$ задано скалярное произведение, и тем самым любой вектор из $\mathbb{R}^r$ можно рассматривать как линейный функционал на $\mathbb{R}^r$.

Пусть L есть некоторое подпространство в $\mathbb{R}^r$.

Определение 3.1. Набор векторов $h_1,\ldots,h_\nu \in \mathbb{R}^r$ назовем *позитивно независимым на подпространстве* L, если для любых коэффициентов $\alpha_i \ge 0$, таких что $\sum \alpha_i > 0$, линейный функционал $\sum \alpha_i h_i$ не есть тождественный ноль на подпространстве L. Это эквивалентно тому, что позитивно независимы ортогональные проекции данных векторов на данное подпространство; или, что то же самое, что ортогональная проекция выпуклой оболочки данных векторов на данное подпространство не содержит нуля. (Покажите!)

Пусть теперь в пространстве $\mathbb{R}^r$ даны два набора векторов

$$\{A_i,\ i = 1,\ldots,l\} \qquad \text{и} \qquad \{B_j,\ j = 1,\ldots,k\}. \tag{3.32}$$

Определение 3.2. Система векторов (3.32) называется *позитивно–линейно независимой*, если не существует чисел $\alpha_i \ge 0,\ \beta_j$ таких что

$$\sum_i \alpha_i + \sum_j |\beta_j| > 0 \qquad \text{и} \qquad \sum_i \alpha_i A_i + \sum_j \beta_j B_j = 0.$$

Нетрудно установить следующие свойства.

Лемма 22. *Система векторов (3.32) позитивно–линейно независима тогда и только тогда, когда она удовлетворяет следующим двум условиям:*

а) векторы B_j линейно независимы,

б) векторы A_i позитивно независимы на подпространстве $L = \{x \,|\, (B_j, x) = 0 \ \ \forall\, j\,\}$ – общем ядре векторов B_j, т.е. выпуклая оболочка векторов A_i не пересекается с линейной оболочкой векторов B_j .

Лемма 23. *а) Векторы B_j линейно независимы $\Longleftrightarrow \forall\, j_0$ существует вектор $\bar u_0 \in I\!\!R^r$ такой, что*

$$(B_{j_0}, \bar u_0) > 0, \qquad \text{и} \qquad \forall\, j \ne j_0 \qquad (B_j, \bar u_0) = 0;$$

б) Векторы A_i позитивно независимы на указанном подпространстве $L \Longleftrightarrow$ существует вектор $\bar u \in I\!\!R^r$ такой, что

$$(A_i, \bar u) > 0 \quad \forall\, i\,,$$
$$(B_j, \bar u) = 0 \quad \forall\, j\,.$$

Доказательство оставляем читателю в качестве несложного упражнения. (Воспользуйтесь, например, конечномерной теоремой об отделимости.)

Нам потребуется также следующий простой факт из линейной алгебры.

Лемма 24. *Пусть дан любой линейно независимый набор векторов $\widehat B_j$, $j = 1, \ldots, k$, и пусть*

$$\widehat L = \ \{\, v \in I\!\!R^r \ | \ (\widehat B_j,\, v) = 0 \ \ \ \forall\, j\,\}$$

есть их общее ядро, а $\widehat P$ есть оператор ортогонального проектирования на $\widehat L$. Тогда $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0$ такое, что для любых векторов B_j : $|B_j - \widehat B_j| \le \delta,\ \ j = 1, \ldots, k$, оператор P ортогонального проектирования на их общее ядро

$$L = \ \{\, v \in I\!\!R^r \ | \ (B_j,\, v) = 0 \ \ \forall\, j\,\}$$

удовлетворяет оценке $\ ||P - \widehat P|| < \varepsilon$.

(Покажите, что предположение о линейной независимости векторов $\widehat B_j$ здесь существенно.)

2. Перейдем теперь к рассмотрению систем векторов, зависящих от времени. Цель данного параграфа — установить, что если градиенты равенств g'_{ju} и активных неравенств φ'_{iu} линейно–позитивно независимы в каждой точке пространства (t, x, u) (а это будет наше основное предположение в задаче (3.1–3.4)), то вдоль оптимальной траектории $x^0(t), u^0(t), v^0(t)$ эти градиенты равномерно по t линейно–позитивно независимы.

Отсюда мы затем получим, что соответствующие множители Лагранжа (функционалы из L_∞) не имеют сингулярных составляющих. (Мы говорим "позитивно–линейно независимы", если сначала указываются векторы A_i, а потом B_j, и "линейно–позитивно независимы", если векторы указаны в обратном порядке. Надеемся, что это не вызовет путаницы.)

Лемма 25. *Пусть даны позитивно–линейно независимые вектора* $\widehat{A}_i$, $\widehat{B}_j$.
Тогда существует такое $\delta > 0$, *что для любого множества* $E \subset \Delta$ *положительной меры и любых измеримых вектор-функций* $A_i(t)$, $B_j(t)$, *определенных на этом множестве и удовлетворяющих на нем оценкам*

$$|A_i(t) - \widehat{A}_i| < \delta, \qquad |B_j(t) - \widehat{B}_j| < \delta \qquad \text{на } E, \tag{3.33}$$

выполнены следующие два свойства:

а) существует вектор-функция $\bar{u}(t) \in L_\infty$, *такая что п.в. на* E

$$(A_i(t), \bar{u}(t)) \geq 1 \quad \forall\, i, \qquad \text{и} \qquad (B_j(t), \bar{u}(t)) = 0 \quad \forall\, j\,; \tag{3.34}$$

б) для любого j_0 *существует вектор-функция* $\bar{u}_0(t) \in L_\infty$, *такая что п.в. на* E

$$(B_{j_0}(t), \bar{u}_0(t)) = 1, \qquad \text{и} \qquad (B_j(t), \bar{u}_0(t)) = 0 \qquad \forall\, j \neq j_0\,.$$

Доказательство. а) Пусть $\widehat{L}$ есть общее ядро функционалов $\widehat{B}_j$. По лемме 23 существует вектор $\hat{u} \in \mathbb{R}^r$ такой, что

$$(\widehat{A}_i, \hat{u}) > 2 \quad \forall\, i, \qquad (\widehat{B}_j, \hat{u}) = 0 \quad \forall\, j. \tag{3.35}$$

Последние равенства означают, что $\hat{u} \in \widehat{L}$. Возьмем теперь произвольное множество E положительной меры и произвольные вектор-функции $A_i(t)$, $B_j(t)$, удовлетворяющие оценкам (3.33), и введем подпространство

$$L(t) = \ \{ v \in \mathbb{R}^r \mid (B_j(t), v) = 0 \ \ \forall\, j \}.$$

Пусть $\bar{u}(t)$ есть ортогональная проекция вектора $\hat{u}$ на это подпространство. Тогда для $\bar{u}(t)$ равенства в (3.34) выполнены. Ясно, что $\bar{u} \in L_\infty(E)$. Согласно лемме 24, при достаточно малом $\delta > 0$ вектор-функция $\bar{u}(t)$ будет равномерно близка к $\hat{u}$, поэтому с учетом (3.35) будут выполнены и неравенства в (3.34). Таким образом, пункт (а) доказан. Пункт (б) доказывается совершенно аналогично. □

В связи с доказанной леммой введем следующее понятие.
Пусть на измеримом множестве $E \subset \mathbb{R}$ задана система измеримых ограниченных $r-$ мерных вектор-функций

$$\{A_i(t),\ i = 1, \ldots, l\}, \qquad \{B_j(t),\ j = 1, \ldots, k\}, \qquad t \in E. \tag{3.36}$$

Определение 3.3. Будем говорить, что система вектор-функций (3.36) *равномерно позитивно–линейно независима (РПЛН) на множестве* E, если она удовлетворяет свойствам а), б) леммы 25.

Отметим, что свойства а), б) очевидно сохраняются, если от множества E перейти к его любому измеримому подмножеству, а также если от данной системы перейти к любой ее подсистеме.

Справедливо также следующее простое утверждение.

Лемма 26. *Пусть измеримые ограниченные вектор-функции (3.36) РПЛН на измеримых множествах E_1 и E_2 (которые могут и пересекаться.) Тогда они РПЛН и на их объединении $E_1 \bigcup E_2$.*

Доказательство. Достаточно рассмотреть случай, когда E_1 и E_2 не пересекаются. В каждом из свойств а), б) надо взять функции $\bar{u}_1(t)$ и $\bar{u}_2(t)$, соответствующие этим множествам, продолжить их нулем вне E_1 и E_2 соответственно, и рассмотреть их сумму $\bar{u} = \bar{u}_1 + \bar{u}_2$.

Для РПЛН вектор-функций справедливо следующее важное утверждение (ради которого, собственно, и вводилось это понятие).

Пусть система (3.36) РПЛН на некотором множестве E положительной меры.

Теорема 46. (ОБ ОТСУТСТВИИ СИНГУЛЯРНЫХ СОСТАВЛЯЮЩИХ).

Пусть даны h_i, $m_j \in L_\infty^*(E)$ (линейные непрерывные функционалы над пространством $L_\infty(E)$), из которых все $h_i \geq 0$, такие что

$$\sum_i h_i A_i(t) + \sum_j m_j B_j(t) \;=\; l(t) \;\in L_1^r(E) \tag{3.37}$$

(т.е. линейный функционал над пространством $L_\infty^r(E)$, стоящий слева, является элементом $L_1^r(E)$). Тогда все h_i, m_j – элементы $L_1(E)$, т.е. сингулярных составляющих у них нет.

(Поясним: функционалы $h_i A_i(t)$ переводят функцию $\bar{u} \in L_\infty^r(E)$ в число $\langle h_i,\, A_i(t)\bar{u}(t)\rangle$. Так же действуют и функционалы $m_j\, B_j(t)$.)

Доказательство. Допустим сначала, что сингулярная составляющая есть у какого-либо функционала h_i; для определенности пусть это h_1. Таким образом, $h_1 = h_{1a} + h_{1s}$, где функционал h_{1a}– абсолютно непрерывный, а h_{1s}– сингулярный, сосредоточенный на некоторой последовательности множеств $E_n \subset E$, $n = 1, 2, \ldots$, $mes\, E_n \to 0$, и пусть $\gamma = ||h_{1s}|| > 0$.

Согласно (3.37), для любой $\bar{u} \in L_\infty^r$ выполняется равенство

$$\sum_i \langle h_i, (A_i, \bar{u})\rangle + \sum_j \langle m_j, (B_j, \bar{u})\rangle = \int_E (l(t), \bar{u}(t))\, dt. \tag{3.38}$$

По свойству а) леммы 25 существует функция $\bar{u}(t) \in L_\infty^r(E)$ такая, что п.в. на E

$$\forall\, i \quad (A_i(t), \bar{u}(t)) \geq 1, \qquad \text{и} \qquad \forall\, j \quad (B_j(t), \bar{u}(t)) = 0.$$

Рассмотрим последовательность функций $\bar{u}_n(t) = \chi_{E_n}(t)\, \bar{u}(t)$. Для нее вторая сумма в (3.38) пропадает, и поэтому имеем

$$\sum_i \langle h_i, (A_i, \bar{u}_n)\rangle \;= \int_{E_n} (l, \bar{u})\, dt.$$

Поскольку все $h_i \geq 0$ (а тогда все $h_{ia} \geq 0$ и $h_{is} \geq 0$), то левая часть последнего равенства не меньше, чем

$$\langle h_{1s}, \chi_{E_n}\rangle = \langle h_{1s}, \mathbf{1}\rangle = ||h_{1s}|| = \gamma > 0,$$

тогда как правая часть очевидно стремится к нулю (в силу абсолютной непрерывности интеграла Лебега). Противоречие. Таким образом, у функционалов h_i сингулярных составляющих быть не может, все они регулярны: $h_i \in L_1^r$.
Тогда равенство (3.37) приобретает вид

$$\sum_j m_j B_j(t) \; = \; l'(t) \; \in L_1^r(E). \tag{3.39}$$

(Здесь $l'(t) -$ некоторая новая функция из $L_1^r(E)$.)

Предположим теперь, что один из функционалов m_j, например m_1, имеет ненулевую сингулярную составляющую:

$$m_1 = m_{1a} + m_{1s}, \qquad ||m_{1s}|| > 0.$$

Пусть $v(t)-$ такая функция из $L_\infty(E)$, для которой $\langle m_{1s}, v\rangle = 1$. Так как вектор-функции $B_j(t)$ равномерно линейно независимы, то по свойству б) леммы 25 имеется функция $\bar u(t) \in L_\infty^r(E)$ такая, что п.в. на E

$$(B_1(t), \bar u(t)) = v(t), \qquad \text{и} \qquad (B_j(t), \bar u(t)) = 0 \quad \forall\, j > 1.$$

(Надо умножить указанную в этой лемме функцию $\bar u_1(t)$ на $v(t)$.)
Пусть функционал m_{1s} сосредоточен на некоторых множествах E_n, $mes\, E_n \to 0$. Тогда по аналогии с предыдущим для последовательности функций $\bar u_n(t) = \chi_{E_n}(t)\, \bar u(t)$ получим из (3.39):

$$\langle m_1, (B_1, \bar u_n)\rangle \; = \int_{E_n} (l', \bar u)\, dt,$$

$$\text{т.е.} \qquad \langle m_{1s}, (B_1, \bar u_n)\rangle + \langle m_{1a}, (B_1, \bar u_n)\rangle = \int_{E_n} (l', \bar u)\, dt. \tag{3.40}$$

Но поскольку

$$\langle m_{1s}, (B_1, \bar u_n)\rangle = \langle m_{1s}, (B_1, \bar u)\rangle = \langle m_{1s}, v\rangle = 1,$$

то первый член в равенстве (3.40) при всех n равен 1, а два остальных стремятся к нулю, т.е. опять приходим к противоречию. Таким образом, функционалы m_j также не могут иметь сингулярных составляющих. Теорема доказана. □

3. Нас будет интересовать случай, когда вектор-функции (3.36) получены следующим образом. Пусть имеется некоторый компакт D, на котором заданы $r-$ мерные непрерывные вектор-функции

$$a_1(\sigma), \ldots, a_l(\sigma), \quad\; b_1(\sigma), \ldots, b_k(\sigma). \tag{3.41}$$

Пусть дано некоторое измеримое множество положительной меры $E \subset \mathbb{R}$, и задана произвольная измеримая функция $\widehat\sigma : E \to D$. Тогда на множестве E определены измеримые ограниченные вектор-функции

$$\begin{aligned} A_i(t) &= a_i(\widehat\sigma(t)), \qquad & i = 1, \ldots, l\,, \\ B_j(t) &= b_j(\widehat\sigma(t)), \qquad & j = 1, \ldots, k\,. \end{aligned} \tag{3.42}$$

Для систем такого вида справедлива следующая

Лемма 27. *Пусть для любого* $\sigma \in D$ *векторы (3.41) позитивно-линейно независимы. Тогда для любого измеримого множества* E *и любой измеримой функции* $\widehat{\sigma} : E \to D$ *вектор-функции (3.42) РПЛН на* E .

Доказательство. По лемме 25 для каждого $\sigma \in D$ и векторов $\widehat{A}_i = a_i(\sigma)$, $\widehat{B}_j = b_j(\sigma)$ найдется некоторое $\delta > 0$, для которого выполнено утверждение этой леммы, и далее, в силу непрерывности вектор-функций (3.41) найдется такая окрестность $\mathcal{O}(\sigma)$, что $\forall\, \sigma' \in \mathcal{O}(\sigma)$ выполнены неравенства

$$|a_i(\sigma') - a_i(\sigma)| < \delta \quad \forall\, i, \qquad |b_j(\sigma') - b_j(\sigma)| < \delta \quad \forall\, j.$$

Так как D есть компакт, то можно выбрать конечное число точек $\sigma_s \in D$, $s = 1, \dots, p$, окрестности $\mathcal{O}(\sigma_s)$ которых покроют весь компакт D.

Определим измеримые множества $E_s = \{t \in E \mid \widehat{\sigma}(t) \in \mathcal{O}(\sigma_s)\,\}$, объединение которых есть все множество E. Так как при каждом s векторы (3.41) при $\sigma = \sigma_s$ позитивно-линейно независимы, а на каждом множестве E_s выполнены оценки

$$|a_i(\widehat{\sigma}(t)) - a_i(\sigma_s)| < \delta \quad \forall\, i, \qquad |b_j(\widehat{\sigma}(t)) - b_j(\sigma_s)| < \delta \quad \forall\, j,$$

то по лемме 25 вектор-функции (3.42) РПЛН на E_s . А тогда по лемме 26 они РПЛН и на всем множестве $E = \bigcup E_s$. Лемма доказана. □

4. Нам потребуется рассмотреть также ситуацию, когда каждый вектор $a_i(\sigma)$ участвует в системе лишь на некотором своем "активном" множестве.

А именно, пусть вектор-функции (3.41) заданы и непрерывны на некотором компакте D, и пусть заданы также замкнутые подмножества этого компакта $\Gamma_i \subset D$, $i = 1, \dots, l$.

Тогда $\forall\, \sigma \in D$ определено множество "активных индексов"

$$I(\sigma) = \{\, i \mid \sigma \in \Gamma_i\,\},$$

и определена соответствующая система векторов

$$\{\, a_i(\sigma), \quad i \in I(\sigma)\,\}, \qquad \{\, b_j(\sigma), \;\; j = 1, \dots, k\,\}. \tag{3.43}$$

Таким образом, каждый вектор $a_i(\sigma)$ входит в систему только на своем множестве Γ_i .

Пусть теперь задано некоторое измеримое отображение $\widehat{\sigma} : \Delta \to D$, и тем самым на Δ определены измеримые ограниченные вектор-функции (3.42). Согласно (3.43), каждая функция $A_i(t)$ входит в систему только на своем измеримом множестве

$$M_i = \{\, t \in \Delta \mid \; \widehat{\sigma}(t) \in \Gamma_i\,\}.$$

Легко видеть, что всегда существует разбиение отрезка Δ на конечное число измеримых множеств E_s, $s = 1, \dots, p$, таких что каждое множество M_i есть объединение некоторого набора множеств E_s .

Тогда на каждом множестве E_s множество активных индексов для данной функции $\widehat{\sigma}(t)$ постоянно; обозначим его I_s. (Не исключается случай $I_s = \emptyset$.) Таким образом, $I_s = I(\widehat{\sigma}(t))$ на E_s .

Для такой ситуации справедлива следующая

Лемма 28. *Пусть* $\forall\,\sigma \in D$ *векторы (3.43) позитивно-линейно независимы. Тогда* $\forall\, s = 1, \dots, p$ *соответствующая система вектор-функций*

$$\begin{aligned} &A_i(t) = a_i(\widehat{\sigma}(t)), \qquad && i \in I_s\,, \\ &B_j(t) = b_j(\widehat{\sigma}(t)), \qquad && j = 1, \dots, k\,. \end{aligned} \tag{3.44}$$

РПЛН на множестве E_s .

Доказательство. Зафиксируем произвольное s и рассмотрим компакт $D_s = \{\,\sigma \in D \mid \sigma \in \Gamma_i \;\forall i \in I_s\,\}$. Если I_s непусто, то $D_s = \bigcap \{\,\Gamma_i \mid i \in I_s\,\}$, если же I_s пусто, то $D_s = D$. По условию $\forall\,\sigma \in D_s$ набор векторов

$$\{\, a_i(\sigma), \quad i \in I_s\,\}, \qquad \{\, b_j(\sigma),\;\; j = 1, \dots, k\,\}$$

позитивно-линейно независим. По построению $\forall\, t \in E_s$ имеем $\widehat{\sigma}(t) \in D_s$. А тогда по лемме 27 получаем требуемое утверждение. □

Теперь мы можем доказать аналог теоремы 46 для описанной ситуации, когда имеется система векторов (3.43) с переменным множеством активных индексов. Предположим, что $\forall\,\sigma \in D$ векторы (3.43) позитивно-линейно независимы.

Теорема 47. (ОБ ОТСУТСТВИИ СИНГУЛЯРНЫХ СОСТАВЛЯЮЩИХ).

Пусть даны $h_i,\ m_j \in L^*_\infty(\Delta)$ *(линейные непрерывные функционалы над пространством* $L_\infty(\Delta)$*), где* $i = 1, \dots, l$, $j = 1, \dots, k$, *из которых каждый* $h_i \ge 0$ *и сосредоточен на своём* M_i , *такие что*

$$\sum_i h_i A_i(t) + \sum_j m_j B_j(t) \;=\; l(t) \;\in L^r_1(\Delta). \tag{3.45}$$

Тогда все $h_i,\ m_j$ – *элементы* $L_1(\Delta)$.

Доказательство. Рассмотрим вышеуказанное разбиение $\Delta = \bigcup_s E_s$. Тогда на каждом E_s множество индексов $i \in I_s$ постоянно, и по лемме 28 система вектор-функций (3.44) РПЛН на E_s, поэтому мы находимся в условиях теоремы 46. По этой теореме на множестве E_s сингулярных составляющих нет, а тогда их нет и на всем Δ .
□

5. Рассмотрим случай, когда каждый компакт Γ_i задан неравенством $\varphi_i(\sigma) \ge 0$, где φ_i – непрерывная функция на D, $i = 1, \dots, l$.

Покажем, что можно расширить компакты Γ_i , перейдя к ослабленным неравенствам $\varphi_i(\sigma) \ge -\delta$, сохранив при этом позитивно-линейную независимость векторов (3.43).

Для произвольного $\delta \ge 0$ введем множества

$$\Gamma_i^\delta = \;\{\, \sigma \in D \mid\; \varphi_i(\sigma) \ge -\delta\,\},$$

(так что $\Gamma_i^0 = \Gamma_i$), и определим соответствующее множество активных индексов

$$I^\delta(\sigma) = \;\{\, i \mid \sigma \in \Gamma_i^\delta \;\}.$$

Ясно, что $I^\delta(\sigma) \supset I^0(\sigma) = I(\sigma)$, т.е. система участвующих векторов расширяется.

Лемма 29. *Пусть* $\forall\,\sigma \in D$ *векторы (3.43) позитивно-линейно независимы. Тогда* $\exists\,\delta > 0$ *такое, что* $\forall\,\sigma \in D$ *векторы*

$$\{\, a_i(\sigma), \quad i \in I^\delta(\sigma)\,\}, \qquad \{\, b_j(\sigma), \;\; j = 1,\ldots,k\,\}. \tag{3.46}$$

также позитивно-линейно независимы.

Доказательство. Допустим, это не так. Тогда для любого n при $\delta = 1/n$ найдется точка $\sigma^n \in D$, в которой векторы (3.46) позитивно-линейно зависимы, т.е. для них имеются коэффициенты $\alpha_i^n \ge 0$, β_j^n такие, что $\sum \alpha_i^n + \sum |\beta_j^n| = 1$ и

$$\sum \alpha_i^n\, a_i(\sigma^n) \; + \sum \beta_j^n\, b_j(\sigma^n) = 0. \tag{3.47}$$

Здесь i таковы, что $\varphi_i(\sigma^n) \ge -1/n$. Для единообразия можно считать, что $\alpha^n = (\alpha_1^n,\ldots,\alpha_l^n) \in \mathbb{R}^l$, т.е. участвуют все индексы, но $\alpha_i^n = 0$, если $\varphi_i(\sigma^n) < -1/n$.
С учетом неотрицательности коэффициентов α_i^n это можно записать эквивалентным образом в виде "ослабленного" условия дополняющей нежесткости:

$$\alpha_i^n\,(\varphi_i(\sigma^n) + 1/n) \;\ge\; 0. \tag{3.48}$$

Введем множество $S = \{\; (\alpha,\,\beta) \in \mathbb{R}^{l+k} \mid \alpha_i \ge 0 \;\; \forall\, i, \quad \sum \alpha_i + \sum |\beta_j| = 1 \;\}$.
Тогда $(\alpha^n, \beta^n) \in S$. Так как D и S — компакты, то можно считать, что

$$\sigma^n \to \sigma^0 \in D, \qquad (\alpha^n, \beta^n) \to (\alpha^0, \beta^0) \in S.$$

В силу непрерывности векторов $a_i(\sigma)$, $b_j(\sigma)$ из равенства (3.47) в пределе получаем

$$\sum \alpha_i^0\, a_i(\sigma^0) \; + \sum \beta_j^0\, b_j(\sigma^0) = 0,$$

а неравенство (3.48) превращается в $\alpha_i^0\, \varphi_i(\sigma^0) \ge 0$. Последнее означает, что в предельной комбинации участвуют лишь те векторы $a_i(\sigma^0)$, для которых $\varphi_i(\sigma^0) \ge 0$, т.е. $i \in I^0(\sigma^0)$, и тогда получаем, что векторы (3.43) при $\sigma = \sigma^0$ позитивно-линейно зависимы, а это противоречит условию леммы. □

6. Понятие равномерной позитивно-линейной независимости можно рассматривать не только для измеримых вектор-функций, но и вообще для произвольного семейства векторов

$$\{A_i(\theta),\; i = 1,\ldots,l\}, \qquad \{B_j(\theta),\; j = 1,\ldots,k\}, \qquad \theta \in T, \tag{3.49}$$

где $T-$ произвольное множество. Пусть это семейство равномерно ограничено, т.е. $\exists\, m$ такое, что $\forall\,\theta \in T$

$$|A_i(\theta)| \le m \quad \forall\, i, \qquad\qquad |B_j(\theta)| \le m \quad \forall\, j\,.$$

Будем говорить, что это семейство РПЛН, если по аналогии со свойствами а),б) леммы 25 при некотором $d > 0$ выполнены следующие два свойства:

а) для любого $\theta \in T$ существует вектор $\bar u \in \mathbb{R}^r$, такой что $|\bar u| \le 1$ и

$$(A_i(\theta), \bar u) \ge d \quad \forall\, i \qquad \text{и} \qquad (B_j(\theta), \bar u) = 0 \quad \forall\, j\,; \tag{3.50}$$

б) для любого $\theta \in T$ и любого j_0 существует вектор $\bar{u}_{j_0} \in \mathbb{R}^r$, такой что $|\bar{u}_{j_0}| \le 1$ и

$$(B_{j_0}(\theta), \bar{u}_{j_0}) = d, \qquad \text{и} \qquad (B_j(\theta), \bar{u}_{j_0}) = 0 \qquad \forall\, j \neq j_0 \,.$$

Имеет место следующая полезная характеризация РПЛН семейства векторов (которую можно было бы принять за определение).

Лемма 30. *Равномерно ограниченное семейство векторов (3.49) РПЛН тогда и только тогда, когда существует такое число $\gamma > 0$, что для любого $\theta \in T$ и любого набора чисел $\alpha_i \ge 0$, β_j выполнена оценка*

$$\left| \sum_i \alpha_i\, A_i(\theta) + \sum_j \beta_j\, B_j(\theta) \right| \;\ge\; \gamma \left(\sum_i \alpha_i + \sum_j |\beta_j| \right). \tag{3.51}$$

Для доказательства леммы нам понадобится следующее

Предложение 7. *Пусть векторы $v, a, b \in \mathbb{R}^n$ и число $0 < \varepsilon \le 1$ таковы, что $|v| \le 1$, $(v, b) = 0$, $(v, a) \ge \varepsilon |a|$. Тогда $|a + b| \ge \varepsilon |b|$ и точно так же $|a - b| \ge \varepsilon |b|$.*

Доказательство. Считаем, что $a \neq 0$ и $b \neq 0$ (иначе требуемое неравенство тривиально выполнено). Из условия следует, что тогда векторы a и b не колинеарны (иначе $(v, a) = 0$), поэтому их линейная оболочка есть двумерная плоскость. Вектор v можно заменить на его проекцию на эту плоскость, и таким образом, данное предложение сводится к двумерному случаю. Ясно, что можно считать $|v| = 1$, и что вектор a образует острые углы φ, θ с векторами v, b, так что $\varphi + \theta = \pi/2$. Тогда $\cos\varphi \ge \varepsilon$, $\cos^2\varphi + \cos^2\theta = 1$, и поэтому

$$\begin{aligned}
&|a+b|^2 = \; (a+b,\, a+b) = \; |a|^2 + 2|a|\,|b|\, \cos\theta \; + |b|^2 \; = \\
&= \; (|a| + |b| \cos\theta)^2 \; + \; |b|^2 \; - |b|^2 \cos^2\theta \; \ge \\
&\ge \; |b|^2\, (1 - \cos^2\theta) \; = \; |b|^2 \cos^2\varphi \; \ge \; \varepsilon^2 |b|^2, \qquad \text{ч.т.д.} \qquad \square
\end{aligned}$$

Доказательство леммы 30 ($\Longrightarrow$) Пусть семейство (3.49) РПЛН. Зафиксируем любое $\theta \in T$, и положим $A = \sum \alpha_i\, A_i(\theta)$ $(\alpha_i \ge 0)$, $B = \sum \beta_j\, B_j(\theta)$.

Из свойства б) вытекает оценка

$$|B| \;\ge\; \frac{d}{k} \Big(\sum |\beta_j| \Big). \tag{3.52}$$

Действительно, $\forall\, j_0$ очевидно

$$|B| \ge (B, \bar{u}_{j_0}) = \beta_{j_0}\, (B_{j_0}(\theta), \bar{u}_{j_0}) = \beta_{j_0}\, d,$$

и точно так же $|B| \ge -\beta_{j_0}\, d$, поэтому $|B| \ge |\beta_{j_0}|\, d$. Складывая эти неравенства по всем j_0 и деля на k, получаем (3.52).

По аналогии с этим, из свойства а) вытекает оценка

$$|A + B| \;\ge\; d \Big(\sum \alpha_i \Big). \tag{3.53}$$

Далее, из того же свойства а) вытекает, что $\forall\, i$

$$(A_i(\theta), \bar u) \;\ge d \;=\; \tfrac{d}{m}\, m \;\ge\; \tfrac{d}{m}\, |A_i(\theta)|\,.$$

Отсюда в силу сублинейности модуля получаем для $A = \sum \alpha_i\, A_i(\theta)$:

$$|A| \;\le \sum \alpha_i\, |A_i(\theta)| \;\le\; \sum \alpha_i\, \frac{m}{d}\, (A_i(\theta), \bar u) \;=\; \frac{m}{d}\, (A, \bar u).$$

т.е. $(A, \bar u) \;\ge\; \frac{d}{m}|A|$. Поскольку $(B, \bar u) = 0$ (ибо $(B_j(\theta), \bar u) = 0 \;\; \forall j$) и $|\bar u| \le 1$, то согласно предложению 7 имеет место оценка

$$|A + B| \;\ge\; \frac{d}{m}\, |B|. \tag{3.54}$$

Складывая неравенства (3.53) и (3.54) и учитывая (3.52), получаем

$$|A + B| \;\ge\; \Big(\sum \alpha_i + \sum |\beta_j| \Big)\, \frac{d^2}{km + d}\,,$$

т.е. выполнено (3.51) с $\gamma = d^2/(km + d)$.

($\Longleftarrow$) Пусть выполнено (3.51). Зафиксируем любое $\theta \in T$ и покажем, что для векторов $A_i(\theta),\, B_j(\theta)$ выполнены свойства а), б) с константой $d = \gamma$.

Обозначим через P линейную оболочку векторов $B_j(\theta)$. Пусть $\sum \alpha_i = 1$ и все $\alpha_i \ge 0$. В этом случае из (3.51) вытекает, что $\rho(\sum \alpha_i A_i(\theta),\, P) \ge \gamma,$ и следовательно, выпуклая оболочка векторов $\{A_i(\theta)\}$ отстоит от подпространства P не менее, чем на γ. Тогда существует единичный вектор $\bar u \perp P$ такой, что скалярное произведение $(co\,\{A_i(\theta)\},\, \bar u) \ge \gamma,$ а это эквивалентно выполнению (3.50) с $d = \gamma$.

Далее, положим все $\alpha_i = 0$. Выделим любой индекс j_0 и положим $\beta_{j_0} = 1$. Из (3.51) вытекает, что для любых $\beta_j,\; j \ne j_0$

$$\left|\; B_{j_0}(\theta) \;+\; \sum_{j \ne j_0} \beta_j\, B_j(\theta) \;\right| \;\ge\; \gamma,$$

т.е. вектор $B_{j_0}(\theta)$ отстоит от линейной оболочки остальных векторов $B_j(\theta),\;\; j \ne j_0$ не менее, чем на γ. Тогда существует единичный вектор $\bar u_{j_0}$, ортогональный этой линейной оболочке, для которого $(B_{j_0}(\theta),\, \bar u_{j_0}) \ge \gamma$. Отсюда следует свойство б) с $d = \gamma$. Лемма доказана. $\square$

Следствие. Пусть в условиях теоремы 47 функция $l(t)$ ограничена. Тогда все функционалы $h_i\,,\; m_j$ задаются измеримыми ограниченными функциями $h_i(t),\; m_j(t),$ т.е. все $h_i\,,\; m_j \,\in L_\infty(\Delta, \mathbb{R})$.

Доказательство. По теореме 47 все $h_i\,,\; m_j$ представляются функциями из $L_1(\Delta, \mathbb{R})$; при этом

$$\sum h_i(t)\, A_i(t) + \sum m_j(t)\, B_j(t) \;=\; l(t).$$

Так как вектор-функции $A_i(t),\; B_j(t)$ РПЛН, то отсюда по лемме 30 получаем для почти всех t :

$$\sum h_i(t) + \sum |m_j(t)| \;\le\; \frac{1}{\gamma}\, |l(t)| \;\le\; \text{const}\,. \qquad \square$$

3.6 Постановка канонической гладкой задачи С и ее формализация

1. Постановка канонической гладкой задачи с фазовыми и смешанными ограничениями — задачи C **.** Пусть $\Delta = [t_0, t_1]$ – фиксированный отрезок времени. Напомним, что через $x(t)$ мы обозначаем функцию $x(\cdot) : \Delta \longrightarrow \mathbb{R}^n$, которую называем *фазовой переменной*, или *фазой*, а через $u(\cdot) : \Delta \longrightarrow \mathbb{R}^m$ — функцию, которую называем *управлением.* Функция $x(\cdot)$ имеет концевые значения $x_0 = x(t_0)$, $x_1 = x(t_1)$, их пару мы обозначаем $p = (x_0, x_1) \in \mathbb{R}^{2n}$.

Пусть $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^{2n}$ есть открытое множество, на котором заданы скалярные функции

$$F_\nu(p) : \mathcal{P} \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad \nu = 0, 1, ..., d(F),$$

и векторная функция

$$K(p) : \mathcal{P} \longrightarrow \mathbb{R}^{d(K)}.$$

(Как и ранее, через $d(a)$ обозначается размерность вектора a .)
Функции F_ν и K предполагаются непрерывно дифференцируемыми на $\mathcal{P}$.

Далее, пусть $\mathcal{Q} \subset \mathbb{R}^{1+n+r}$ — открытое множество, на котором заданы функции

$$f(t, x, u) : \mathcal{Q} \longrightarrow \mathbb{R}^n, \qquad g(t, x, u) : \mathcal{Q} \longrightarrow \mathbb{R}^{d(g)}, \qquad \varphi(t, x, u) : \mathcal{Q} \longrightarrow \mathbb{R}^{d(\varphi)}.$$

На множестве $\mathcal{Q}$ задана также функция $\Phi(t, x) : \mathcal{Q} \to \mathbb{R}^{d(\Phi)}$. (Так как Φ не зависит от u, то фактически она задана на проекции множества $\mathcal{Q}$ на пространство (t, x).)

Рассмотрим следующую задачу оптимального управления, которую будем называть *канонической задачей* C :

$$\mathcal{J} = F_0(x_0, x_1) \longrightarrow \min; \tag{3.55}$$

$$F_\nu(x_0, x_1) \le 0, \quad \nu = 1, \ldots, d(F); \quad K(x_0, x_1) = 0, \tag{3.56}$$

$$\dot{x} = f(t, x, u), \tag{3.57}$$

$$g(t, x, u) = 0, \quad \varphi(t, x, u) \le 0, \tag{3.58}$$

$$\Phi(t, x) \le 0; \tag{3.59}$$

$$(x_0, x_1) \in \mathcal{P}, \quad (t, x, u) \in \mathcal{Q}. \tag{3.60}$$

Требуется найти фазовую переменную $x = x(t)$ и управление $u = u(t)$ на фиксированном отрезке $\Delta = [t_0, t_1]$ так, чтобы были выполнены ограничения (3.56)-(3.60) и *функционал* (3.55) принимал минимально возможное значение.

Пару функций $(x(t), u(t))$ будем обозначать $w(t)$. Таким образом,

$$w = w(t) : \Delta \longrightarrow \mathbb{R}^{n+r} .$$

Соответственно, для пары конечномерных векторов $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^r$ мы используем обозначение $w = (x, u) \in \mathbb{R}^{n+r}$.

Уравнение (3.57) называется *дифференциальной связью* и подробнее записывается так:

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)) \qquad \text{для почти всех } t \in \Delta .$$

Условия (3.58) называют (поточечными) *смешанными* ограничениями типа равенства и неравенства на фазовую переменную и управление, и подробнее записывают так:

$$g(t, x(t), u(t)) = 0, \qquad \varphi(t, x(t), u(t)) \le 0 \qquad \text{для почти всех } t \in \Delta\ .$$

Условие (3.59), понимаемое как $\Phi(t, x(t)) \le 0$ для всех $t \in \Delta$, называют *фазовым* ограничением.

Открытые множества $\mathcal{P}$ и $\mathcal{Q}$ — это не ограничения, а области определения функций задачи. Условия (3.60) подробнее записывают так:

$$(x(t_0), x(t_1)) \in \mathcal{P}; \qquad (t, x(t), u(t)) \in \mathcal{Q} \quad \text{для почти всех } t \in \Delta\ .$$

Функционал (3.55) и ограничения (3.56) называют *концевыми* (или *терминальными*). Вместе условия (3.55)-(3.56) (с условием $(x_0, x_1) \in \mathcal{P}$) образуют *концевой* (или *терминальный*) *блок* задачи. Поточечные условия (3.57)-(3.59) (с условием $(t, x, u) \in \mathcal{Q}$) определяют *управляемую систему.* (Иногда к ней относят лишь дифференциальную связь (3.57), но нам представляется, что более правильно включать в это понятие все поточечные ограничения; тогда, например, управляемая система остается инвариантной при различных преобразованиях задачи.)

Условимся в дальнейшем все соотношения, содержащие измеримые множества и функции, понимать выполненными почти всюду на Δ.

Предположения:

C1) Функции F, K непрерывно дифференцируемы на $\mathcal{P}$;

C2) Функция Φ непрерывна на $\mathcal{Q}$ вместе со своей производной по x .

C3) Функции f, g, φ и их первые производные по x, u непрерывны на $\mathcal{Q}$ по совокупности переменных.

Итак, C1–C3 это предположения о гладкости функций, участвующих в постановке задачи C. Отметим, что они касаются каждой функции по отдельности, и в той или иной форме присутствуют в постановке любой задачи.

Гораздо менее очевидным является следующее

C4) Предположение о регулярности смешанных ограничений:
в любой точке $(x, u) \in \mathcal{Q}$, удовлетворяющей ограничениям

$$g(t, x, u) = 0, \qquad \varphi(t, x, u) \le 0,$$

градиенты смешанных ограничений по u

$$g_{ju}(t, x, u), \;\; j = 1, \ldots, d(g), \qquad \varphi_{iu}(t, x, u), \;\; i \in I(t, x, u),$$

где $I(t, x, u) = \{i \mid \varphi_i(t, x, u) = 0\}$ — множество активных индексов ограничения $\varphi \le 0$ в точке (t, x, u), *линейно-позитивно независимы.*

Это предположение позволит нам избежать трудностей, связанных с возможным наличием сингулярных составляющих у множителей Лагранжа, соответствующих смешанным ограничениям.

Теперь определим пространство, в котором мы рассматриваем каноническую задачу C. Предполагается, что $x(t) : \Delta \longrightarrow \mathbb{R}^n$ — элемент пространства $AC(\Delta; \mathbb{R}^n)$ абсолютно непрерывных функций на отрезке Δ со значениями в $\mathbb{R}^n$, а $u(t) : \Delta \longrightarrow \mathbb{R}^r$ — элемент пространства $L_\infty(\Delta; \mathbb{R}^r)$ ограниченных измеримых функций на отрезке Δ со значениями в $\mathbb{R}^r$. Таким образом, пара $w(\cdot) = (x(\cdot), u(\cdot))$ есть элемент пространства

$$W = AC(\Delta, \mathbb{R}^n) \times L_\infty(\Delta, \mathbb{R}^r)$$

с нормой

$$\|w\| = \|x\|_{AC} + \|u\|_\infty,$$

где

$$\|x\|_{AC} = |x(t_0)| + \int_\Delta |\dot{x}(t)| dt, \qquad \|u\|_\infty = \operatorname*{vraimax}_\Delta |u(t)|.$$

Наконец, примем два предположения относительно исследуемой траектории.

C5) Будем исследовать на оптимальность лишь те траектории $(x^0(t), u^0(t))$, которые проходят внутри множества $\mathcal{Q}$ на положительном расстоянии от его границы. Поскольку функция $u^0(t)$ предполагается у нас ограниченной, это означает, что существует компакт $\Omega \subset \mathcal{Q}$ такой, что

$$(t, x^0(t), u^0(t)) \in \Omega \qquad \text{для почти всех } t \in \Delta\,. \tag{3.61}$$

(Компакт Ω конечно зависит от траектории.)

C6) Концы траектории $x^0(t)$ лежат строго внутри всех фазовых ограничений:

$$\Phi_s(t_0,\, x^0(t_0)) < 0, \qquad \Phi_s(t_1,\, x^0(t_1)) < 0, \qquad \forall\, s = 1, \dots, d(\Phi).$$

Это последнее предположение мы делаем для того, чтобы исключить нежелательное взаимодействие фазовых ограничений (3.59) с концевыми (3.56), из-за чего получающиеся условия стационарности могут оказаться вырожденными (тривиальными). Случай, когда предположение C6 не выполнено, требует специального исследования, и здесь мы его не рассматриваем.

2. Формализация задачи C. Теперь мы покажем, что задача C соответствует абстрактной постановке (2.52) — негладкой абстрактной задаче (с равенствами и неравенствами), для которой мы уже получили необходимое условие локального минимума.

Введем функционалы на пространстве W :

$$\tilde{F}_0(w) = F_0(x_0, x_1), \tag{3.62}$$

$$\tilde{F}_\nu(w) = F_\nu(x_0, x_1), \quad \nu = 1, \dots, d(F), \tag{3.63}$$

где, как и прежде, $x_0 = x(t_0)$, $x_1 = x(t_1)$,

$$F_i^\varphi(w) = \operatorname*{vraimax}_{t\in\Delta} \varphi_i(t, w(t)), \quad i = 1, \dots, d(\varphi), \tag{3.64}$$

$$F_s^\Phi(w) = \max_{t\in\Delta} \Phi_s(t, x(t)), \quad s = 1, \dots, d(\Phi). \tag{3.65}$$

Пусть $\mathcal{U}$ есть множество всех функций $w = (x, u) \in W$, удовлетворяющих предположению С5 и таких, что $(x(t_0), x(t_1)) \in \mathcal{P}$. Тогда $\mathcal{U}$ – открытое множество в пространстве W, на котором определены функционалы $\tilde{F}_0$, $\tilde{F}_\nu$, F_i^φ , F_s^Φ. Элементарно проверяется, что при сделанных предположениях гладкости $\tilde{F}_0$, $\tilde{F}_\nu$ непрерывно дифференцируемы по Фреше на $\mathcal{U}$.

Что же касается функционалов F_i^φ и F_s^Φ , то, как было показано ранее (см. §3.3 и §3.4), каждый из них удовлетворяет условию Липшица в окрестности любой точки $w \in \mathcal{U}$ (сузив, если надо, $\mathcal{U}$, мы можем считать, что они липшицевы на всем $\mathcal{U}$), в произвольной точке множества $\mathcal{U}$ каждый из них имеет производную по любому направлению $\bar{w} \in W$, и эта производная представляет собой ограниченный сублинейный функционал по $\bar{w}$.

Наконец, определим на $\mathcal{U}$ оператор G, переводящий произвольный элемент $w(\cdot) = (x(\cdot), u(\cdot)) \in \mathcal{U}$ в тройку

$$G(w) = \ (\dot{x}(t) - f(t, w(t)),\ \ g(t, w(t)),\ \ K(x(t_0), x(t_1))\,), \tag{3.66}$$

принадлежащую произведению $L_1(\Delta, \mathbb{R}^n) \times L_\infty(\Delta, \mathbb{R}^{d(g)}) \times \mathbb{R}^{d(K)}$. Согласно \$ 3.1, этот оператор непрерывно дифференцируем по Фреше на $\mathcal{U}$, и его производная $G'(w^0)$ имеет замкнутый образ.

В результате каноническая задача C оказалась представленной в виде, соответствующем негладкой абстрактной задаче:

$$\begin{aligned}
&\tilde{F}_0(w) \longrightarrow \min, \quad \tilde{F}_\nu(w) \le 0, \qquad \nu = 1, \ldots, d(F),\\
&F_i^\varphi(w) \le 0, \qquad i = 1, \ldots, d(\varphi),\\
&F_s^\Phi(w) \le 0, \qquad s = 1, \ldots, d(\Phi),\\
&G(w) = 0, \qquad w \in \mathcal{U}.
\end{aligned}$$

Все предположения, которые мы сделали в главе 2 для абстрактной негладкой задачи, оказались для задачи оптимального управления C в окрестности точки w^0 выполнены.

Функционал $y^* \circ G'(w^0)$. Теперь мы можем воспользоваться правилом множителей Лагранжа, которое мы получили в абстрактной негладкой задаче – задаче $\mathcal{Z}_C$. Прежде, чем это сделать, выясним, что собой представляет функционал $y^* \in Y^*$, где $Y = L_1(\Delta, \mathbb{R}^n) \times L_\infty(\Delta, \mathbb{R}^{d(g)}) \times \mathbb{R}^{d(K)}$ — пространство, в которое действует линейный оператор $G'(w^0)$.

Как известно, любой линейный функционал l над пространством $L_1(\Delta, \mathbb{R}^n)$ имеет представление:

$$(l, z) = \int\limits_\Delta \psi(t)\, z(t)\, dt \qquad \forall\, z \in L_1(\Delta, \mathbb{R}^n),$$

где $\psi(t)$ есть некоторая функция из $L_\infty(\Delta, \mathbb{R}^n)$. Это означает, что $L_1(\Delta, \mathbb{R}^n)^* = L_\infty(\Delta, \mathbb{R}^n)$. Следовательно,

$$Y^* = \ L_\infty(\Delta, \mathbb{R}^n) \times L_\infty^*(\Delta, \mathbb{R}^{d(g)}) \times \mathbb{R}^{d(K)}\,.$$

Элементы $y^* \in Y^*$ обозначим как $y^* = (\psi, m, \beta)$, где

$$\psi(\cdot) \in L_\infty(\Delta, \mathbb{R}^n), \qquad m \in L_\infty^*(\Delta, \mathbb{R}^{d(g)}), \qquad \beta \in \mathbb{R}^{d(K)}\,.$$

Таким образом, функционал $y^* \circ G'(w^0)$ имеет вид:

$$(y^* \circ G'(w^0))\,\bar{w} = \langle y^*,\, G'(w^0)\bar{w}\rangle = \int\limits_{\Delta} \psi\,(\dot{\bar{x}} - f^0_w \bar{w})\,dt \;+\; \langle m, g^0_w \bar{w}\rangle \;+\; (\beta,\, K^0_p \bar{p}),$$

где для краткости мы пишем $f^0_w = f'_w(t, w^0(t)), \quad g^0_w = g'_w(t, w^0(t)), \quad K^0_p = K'_p(p^0)$.

По определению

$$\|y^*\| = \|\psi\|_{L_\infty} + \|m\|_{L^*_\infty} + |\beta|.$$

3.7 Условие стационарности в задаче C: уравнение Эйлера-Лагранжа

1. Условие слабого минимума в задаче C. Пусть w^0 – точка слабого минимума в задаче C. Считаем, что все ограничения типа неравенства активны в этой точке (общий случай разберем позже):

$$\begin{aligned}
&F_\nu(p^0) = 0, \qquad \nu = 1, \ldots, d(F),\\
&\operatorname{vraimax} \varphi_i(t, w^0(t)) = 0, \qquad i = 1, \ldots, d(\varphi),\\
&\max \Phi_s(t, x^0(t)) = 0, \qquad s = 1, \ldots, d(\Phi).
\end{aligned}$$

Согласно необходимому условию локального минимума, полученному ранее для задачи B и применяемому к задаче C, существует набор

$$\begin{aligned}
&\alpha_\nu \ge 0,\;\; \nu = 0, \ldots, d(F); \qquad \alpha^\varphi_i \ge 0, \qquad h_i \in \partial\Psi_{0i},\;\; i = 1, \ldots, d(\varphi);\\
&\alpha^\Phi_s \ge 0, \quad d\mu_s \in \partial\Theta_s, \quad s = 1, \ldots, d(\Phi); \quad \beta \in \mathbb{R}^{d(K)};\\
&\psi(t) \in L_\infty(\Delta, \mathbb{R}^n); \quad m_j \in L^*_\infty(\Delta, \mathbb{R}),\;\; j = 1, \ldots, d(g);
\end{aligned} \tag{3.67}$$

элементов указанных выше пространств, такой что

$$\sum_{\nu=0}^{d(F)} \alpha_\nu + \sum_{i=1}^{d(\varphi)} \alpha^\varphi_i + \sum_{s=1}^{d(\Phi)} \alpha^\Phi_s + |\beta| + \|\psi\|_{L_\infty} + \sum_{j=1}^{d(g)} \|m_j\|_{L^*_\infty} > 0; \tag{3.68}$$

$$\begin{aligned}
&\sum_{\nu=0}^{d(F)} \alpha_\nu F^0_{\nu p}\,\bar{p} \;+\; \sum_{i=1}^{d(\varphi)} \alpha^\varphi_i \langle h_i, \varphi^0_{iw}\bar{w}\rangle \;+\; \sum_{s=1}^{d(\Phi)} \int\limits_{\Delta} \alpha^\Phi_s\, \Phi^0_{sx}\bar{x}\, d\mu_k \;+\\
&+\; \int\limits_{\Delta} \psi\,(\dot{\bar{x}} - f^0_w \bar{w})\,dt \;+\; \sum_{j=1}^{d(s)} \langle m_j, g^0_{jw}\bar{w}\rangle \;+\; \beta K^0_p\,\bar{p} \;= 0 \qquad \forall\, w \in W.
\end{aligned} \tag{3.69}$$

(Здесь и далее все двойственные переменные — вектор-строки). Всю совокупность условий (3.67)–(3.69) будем называть *условием стационарности* или, как предложили Дубовицкий и Милютин, *локальным принципом максимума.* Впрочем, последнего термина мы все же будем по возможности избегать, так как он представляется нам не вполне удачным. Равенство (3.69) Дубовицкий и Милютин назвали *уравнением Эйлера.* Его называют также уравнением Эйлера–Лагранжа.

Напомним, что условие $h_i \in \partial\Psi_{0i}$ означает, что функционал $h_i \geq 0$, сосредоточен на $M_\delta(\varphi_i)$ при любом $\delta > 0$, где $M_\delta(\varphi_i) = \{t \mid \varphi_i(t, w^0(t)) \geq -\delta\}$, и его норма $||h_i|| = \langle h_i, \mathbf{1}\rangle = 1$.

Положим $\alpha_i^\varphi h_i = \tilde{h}_i$. Тогда функционал $\tilde{h}_i \geq 0$, сосредоточен на каждом $M_\delta(\varphi_i)$, и его норма $||\tilde{h}_i|| = \langle \tilde{h}_i, \mathbf{1}\rangle = \alpha_i^\varphi$. Сделаем эту замену в условии нетривиальности (3.68) и уравнении Эйлера–Лагранжа (3.69).

Условие $d\mu_s \in \partial\theta_s$ означает, что мера $d\mu_s \geq 0$, сосредоточена на множестве $M_0(\Phi_s) = \{t \mid \Phi_s(t, x^0(t)) = 0\}$, и ее норма $||d\mu_s|| = \int_\Delta d\mu_s = 1$.

Положим $\alpha_s^\Phi d\mu_s = d\tilde{\mu}_s$. Тогда мера $d\tilde{\mu}_s \geq 0$, сосредоточена на том же множестве $M_0(\Phi_s)$, и ее норма $||d\tilde{\mu}_s|| = \alpha_s^\Phi$. Второе из этих свойств будем записывать также в виде *условия дополняющей нежесткости*

$$\Phi_s(t, x^0(t))\, d\tilde{\mu}_s(t) = 0 \tag{3.70}$$

(т.е. $\Phi_s\, d\tilde{\mu}_s$ есть нулевая мера на отрезке Δ). Сделаем и эту замену в условиях (3.68) и (3.69).

После этих замен условие нетривиальности приобретает вид:

$$\sum_{\nu=0}^{d(F)} \alpha_\nu + |\beta| + \sum_{i=1}^{d(\varphi)} \langle \tilde{h}_i, \mathbf{1}\rangle + \sum_{s=1}^{d(\Phi)} \int_\Delta d\,\tilde{\mu}_s + \|\psi\|_{L_\infty} + \sum_{j=1}^{d(g)} \|m_j\|_{L_\infty^*} > 0. \tag{3.71}$$

Введем *концевую функцию Лагранжа* $l(p) = \sum_{\nu=0}^{d(F)} \alpha_\nu\, F_\nu(p) \; + \; \beta K(p)$.

Тогда уравнение Эйлера–Лагранжа (3.69) имеет вид: для всех $\bar{w} = (\bar{x}, \bar{u}) \in W$

$$l_p^0\, \bar{p} + \sum_{s=1}^{d(\Phi)} \int_\Delta \Phi_{sx}^0 \bar{x}\, d\tilde{\mu}_s + \sum_{i=1}^{d(\varphi)} \langle \tilde{h}_i, \varphi_{iw}^0 \bar{w}\rangle + \sum_{j=1}^{d(g)} \langle m_j, g_{jw}^0 \bar{w}\rangle + \int_\Delta \psi\, (\dot{\bar{x}} - f_w^0 \bar{w}) dt = 0. \tag{3.72}$$

Проанализируем это условие. Верхний индекс "0" и тильду в дальнейшем опускаем, полагая для краткости

$$l_p^0 = l_p, \quad \varphi_w^0 = \varphi_w, \quad f_w^0 = f_w, \quad g_w^0 = g_w, \quad \Phi_x^0 = \Phi_x\,.$$

2. Интегральное представление функционалов h_i, m_j. В уравнении (3.72) положим $\bar{x} = 0$. Тогда $\forall\, \bar{u} \in L_\infty$ должно выполняться равенство

$$\sum_{i=1}^{d(\varphi)} \langle h_i, \varphi_{iu} \bar{u}\rangle \; + \; \sum_{j=1}^{d(g)} \langle m_j, g_{ju} \bar{u}\rangle \; = \int_\Delta \psi(f_u \bar{u}) dt\,. \tag{3.73}$$

Покажем, что отсюда следует абсолютная непрерывность (регулярность) функционалов h_i, m_j и более того, что все они есть элементы пространства $L_\infty(\Delta, \mathbb{R})$.

Лемма 31. *Все функционалы h_i, m_j регулярны, т.е. имеют интегральное представление, причем представляющие их функции $h_i(t)$, $m_j(t)$ ограничены.*

Доказательство. Согласно предположению C5, траектория $\sigma^0(t) = (t, x^0(t), u^0(t))$ содержится в некотором компакте $\Omega \subset \mathbb{R}^{1+n+r}$. Рассмотрим компакт

$$D = \{\sigma = (t,x,u) \in \Omega \mid \ \varphi(\sigma) \le 0, \ \ g(\sigma) = 0\},$$

в котором определим подмножества $\Gamma_i^0 = \{\sigma \in D \mid \varphi_i(\sigma) = 0\}$, и определим соответствующее им множество активных индексов $I^0(\sigma) = \{ i \mid \ \varphi_i(\sigma) = 0\}$.

Согласно предположению C4, в каждой точке $\sigma \in D$ градиенты

$$\begin{aligned} a_i(\sigma) &= \varphi_{iu}(t,x,u), && i \in I^0(\sigma), \\ b_j(\sigma) &= g_{ju}(t,x,u), && j = 1, \ldots, k = d(g), \end{aligned} \tag{3.74}$$

позитивно-линейно независимы. Введем для $\delta > 0$ множества

$$\Gamma_i^\delta = \{\sigma \in D \mid \varphi_i(\sigma) \ge -\delta\},$$

и множество "почти активных" индексов

$$I^\delta(\sigma) = \{ i \mid \varphi_i(\sigma) \ge -\delta\} \ = \ \{ i \mid \sigma \in \Gamma_i^\delta\}.$$

По лемме 29 $\exists\, \delta > 0$, для которого при любом $\sigma \in D$ система (3.74) остается позитивно-линейно независимой, если заменить в ней $I^0(\sigma)$ на $I^\delta(\sigma)$. Зафиксируем это $\delta > 0$, возьмем функцию $\sigma^0(t) = (t, x^0(t), u^0(t)) \in \Omega$ и определим соответствующие ей вектор-функции $A_i(t) = a_i(\sigma^0(t))$, $B_j(t) = b_j(\sigma^0(t))$, которые как раз и участвуют в уравнении (3.73). Функционалы h_i в этом уравнении сосредоточены на множествах

$$M_\delta(\varphi_i) = \{t \in \Delta \mid \sigma^0(t) \in \Gamma_i^\delta\}\,.$$

Тогда мы находимся в условиях теоремы 47, согласно которой все функционалы h_i, m_j есть элементы пространства $L_1(\Delta)$, а по следствию из леммы 30 все они равномерно ограничены (ибо функция $\psi(t)\, f_u(t, w^0(t))$ ограничена). Лемма доказана. $\square$

В силу этой леммы из (3.73) вытекает равенство

$$\sum h_i(t)\, \varphi_{iu}(t, w^0(t)) + \sum m_j(t)\, g_{ju}(t, w^0(t)) \ = \ \psi(t)\, f_u(t, w^0(t)). \tag{3.75}$$

Условие $h_i \ge 0$ означает теперь, что почти всюду $h_i(t) \ge 0$, а поскольку функция $h_i(t)$ сосредоточена на каждом M_i^δ (т.е. равна нулю вне этих множеств), то она сосредоточена на

$$M_0(\varphi_i) = \bigcap_{\delta > 0} M_\delta(\varphi_i) \ = \ \{t \in \Delta \mid \ \varphi_i(t, w^0(t)) = 0\}.$$

Этот факт можно записать, по аналогии с (3.70), в виде условия дополняющей нежесткости

$$h_i(t)\, \varphi_i(t, w^0(t)) \ = \ 0 \quad \text{п.в. на } \Delta. \tag{3.76}$$

Введем функцию Понтрягина $H = \psi\, f(t,x,u)$, и функцию

$$\overline{H} = \ H - \sum h_i\, \varphi_i - \sum m_j\, g_j - \sum \frac{d\mu_s}{dt}\, \Phi_s\,, \tag{3.77}$$

которую назовем *расширенной функцией Понтрягина* (смысл обозначения $\frac{d\mu}{dt}$ поясним позднее). Тогда уравнение (3.75) записывается в виде:

$$\overline{H}_u(t, x^0(t), u^0(t), \psi(t)) \;=\; 0. \tag{3.78}$$

Это есть необходимое условие первого порядка в задаче на максимум функции $H(t, x^0(t), u, \psi(t))$, рассматриваемой при фиксированном t как функции от u , при ограничениях $g(t, x^0(t), u) = 0$, $\varphi(t, x^0(t), u) \le 0$. (Проверьте это утверждение самостоятельно.) Поэтому оно называется *условием стационарности по управлению.*

3. Сопряженное уравнение и условия трансверсальности. Для удобства записи введем вектор-строки $h = (h_1, \ldots, h_{d(\varphi)})$, $m = (m_1, \ldots, m_{d(g)})$, $\mu = (\mu_1, \ldots, \mu_{d(\Phi)})$. Вследствие доказанной леммы об интегральном представлении уравнение (3.72) приобретает вид:

$$l_p\,\bar p + \int\limits_{\Delta} \Phi_x \bar x\, d\mu + \int\limits_{\Delta} \psi(\dot{\bar x} - f_w \bar w)\, dt + \int\limits_{\Delta} h\, \varphi_w \bar w\, dt + \int\limits_{\Delta} m\, g_w \bar w\, dt \;=0 \tag{3.79}$$

для всех $\bar w = (\bar x, \bar u) \in W$. Положим теперь в нем $\bar u = 0$. Тогда для любого $\bar x \in AC(\Delta)$ должно выполняться равенство

$$l_p\,\bar p \;+ \int\limits_{\Delta} \Phi_x \bar x\, d\mu + \int\limits_{\Delta} \psi(\dot{\bar x} - f_x \bar x)\, dt + \int\limits_{\Delta} h\, \varphi_x \bar x\, dt + \int\limits_{\Delta} m\, g_x \bar x\, dt \;= 0. \tag{3.80}$$

Анализ этого равенства затрудняется тем, что участвующие в нем "свободные" аргументы $\bar p = (\bar x_0, \bar x_1)$, $\bar x(t)$, $\dot{\bar x}(t)$ не являются независимыми друг от друга. Поэтому наша цель состоит в том, чтобы переписать это равенство в терминах независимых свободных переменных. В результате мы получим так называемое "сопряженное уравнение" и "условия трансверсальности".

Введем обозначение

$$\rho(t) = \;-\psi(t)\, f_x(t, w^0(t)) + h(t)\, \varphi_x(t, w^0(t)) + m(t)\, g_x(t, w^0(t)). \tag{3.81}$$

(Здесь ψ, h, m – вектор-строки, $f_x,\, \varphi_x,\, g_x$ – матрицы, поэтому ρ – вектор-строка). Уравнение (3.80) запишется в виде

$$l_p\,\bar p \;+ \int\limits_{\Delta} \Phi_x \bar x\, d\mu + \int\limits_{\Delta} \rho(t) \bar x\, dt \;+ \int\limits_{\Delta} \psi\, \dot{\bar x}\, dt \;= 0. \tag{3.82}$$

Функция $\bar x(t)$ целиком определяется заданием $\bar x_0 = \bar x(t_0)$ и $\dot{\bar x}(t)$, причем эти элементы независимы друг от друга. Перепишем последнее равенство в этих независимых переменных, для чего проинтегрируем его второй и третий члены по частям. С этой целью введем функцию ограниченной вариации

$$\Gamma(t) = \int\limits_{[t_0,\, t]} \Phi_x\, d\mu \;= \sum_{s=1}^{d(\Phi)} \int\limits_{[t_0,\, t]} \Phi_{sx}\, d\mu_s\,.$$

Напомним, что согласно предположению C6 в некоторых окрестностях точек t_0 и t_1 выполнены строгие неравенства $\Phi_s(t, x^0(t)) < 0$, поэтому в силу условий дополняющей нежесткости (3.70) все меры $d\mu_s(t) = 0$ в этих окрестностях. Отсюда следует, что функция Γ постоянна в этих окрестностях, и значит, непрерывна в точках t_0 и t_1, так что ее значения в этих точках определены однозначно и никаких скачков нет.

Тогда $\Gamma(t_0) = 0$, и по теореме 45

$$\int\limits_\Delta \bar{x}\,\Phi_x\,d\mu \;=\; \bar{x}\,\Gamma\Big|_{t_0}^{t_1} - \int\limits_\Delta \dot{\bar{x}}(t)\,\Gamma(t)\,dt.$$

Введем также векторы $c_0 = l_{x_0}(p^0)$, $c_1 = l_{x_1}(p^0)$ и липшицеву функцию $R(t)$, удовлетворяющую уравнению

$$\dot{R}(t) \;=\; \rho(t).$$

Интегрируя по частям третий член в (3.82), получим

$$\int_\Delta \rho\,\bar{x}\,dt = \;R\,\bar{x}\Big|_{t_0}^{t_1} - \int_\Delta R\,\dot{\bar{x}}\,dt,$$

и в целом равенство (3.82) превращается в равенство

$$\Big(c_1 + R(t_1) + \Gamma(t_1)\Big)\,\bar{x}_1 \;+\; \Big(c_0 - R(t_0) - \Gamma(t_0)\Big)\,\bar{x}_0 \;+\; \int_\Delta (\psi - R - \Gamma)\,\dot{\bar{x}}\,dt \;= 0. \qquad (3.83)$$

Выберем теперь концевое значение $R(t_1)$ так, чтобы

$$c_1 + R(t_1) + \Gamma(t_1) = 0. \qquad (3.84)$$

Тогда (3.83) превращается в равенство

$$\Big(c_0 - R(t_0) - \Gamma(t_0)\Big)\,\bar{x}_0 \;+ \int (\psi - R - \Gamma)\,\dot{\bar{x}}\,dt \;= 0,$$

которое должно выполняться для всех $\bar{x} \in AC(\Delta)$. Но в этом равенстве переменные $\bar{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ и $\dot{\bar{x}} \in L_1(\Delta)$ уже не зависят друг от друга, и поэтому коэффициенты при этих переменных должны обращаться в ноль:

$$c_0 - R(t_0) - \Gamma(t_0) = 0,$$
$$\psi(t) - R(t) - \Gamma(t) = 0 \quad \text{п.в. на } \Delta.$$

Напомним, что у нас $\psi \in L_\infty(\Delta)$, а элементы этого пространства определяется с точностью до значений на множестве меры нуль. Поэтому, согласно последнему равенству, без ограничения общности можно считать, что $\psi(t) = R(t) + \Gamma(t)$ всюду на Δ, и тогда первое равенство означает, что $\psi(t_0) = R(t_0) + \Gamma(t_0) = c_0$, а равенство (3.84) — что $\psi(t_1) = R(t_1) + \Gamma(t_1) = -c_1$. Таким образом, ψ есть функция ограниченной вариации:

$$\psi(t) = \;c_0 \;+ \int_{t_0}^{t} \rho(\tau)\,d\tau \;+ \int_{t_0}^{t} \Phi_x(\tau)\,d\mu(\tau)\;.$$

С учетом выражения (3.81) для ρ и начального значения $c_0 = l_{x_0}$ это равенство имеет вид:

$$\psi(t) = \;l_{x_0} \;+ \int\limits_{t_0}^{t} (-\psi\,f_x + h\,\varphi_x + m\,g_x)\,d\tau \;+ \int\limits_{t_0}^{t} \Phi_x(\tau)\,d\mu(\tau)\,. \qquad (3.85)$$

Это есть интегральное уравнение относительно сопряженной переменной ψ; оно называется *сопряженным уравнением.* Однако запоминать его удобнее в следующей дифференциальной форме:

$$\dot\psi(t) \;=\; -\psi\, f_x + h\,\varphi_x + m\,g_x \;+\; \Phi_x\,\frac{d\mu}{dt}\,, \tag{3.86}$$

т.е. $\dot\psi(t) \;=\; -\overline{H}_x(t, w^0(t))$. Строгий смысл этого нестандартного уравнения (вместе с начальным условием $\psi(t_0) = l_{x_0}$) состоит в том, что ψ удовлетворяет интегральному уравнению (3.85). Если все меры $d\mu_s$ абсолютно непрерывны, то их плотности $\frac{d\mu_s}{dt}$ – обычные функции из $L_1(\Delta)$, и тогда $\Gamma(t)$, а значит и $\psi(t)$ — также абсолютно непрерывные функции, и (3.86) есть обыкновенное дифференциальное уравнение, так что запись сопряженного уравнения в дифференциальной форме вполне корректна. Но мы будем пользоваться этой записью и в общем случае, когда меры $d\mu_s$ не являются абсолютно непрерывными, так как такая форма сопряженного уравнения легче запоминается, чем интегральная (3.85).

Кроме того, иногда удобно пользоваться записью сопряженного уравнения в форме мер:

$$d\psi(t) \;=\; (-\psi\, f_x + h\,\varphi_x + m\,g_x)\,dt \;+\; \Phi_x\,d\mu(t)\,, \tag{3.87}$$

которая означает равенство мер Стилтьеса, стоящих в левой и правой части этого равенства.

Для концевых значений ψ мы получили соотношения

$$\psi(t_0) = l_{x_0}(p^0), \qquad \psi(t_1) = -l_{x_1}(p^0), \tag{3.88}$$

которые называются *условиями трансверсальности.*

4. Условие нетривиальности. Напомним, что первоначально множители Лагранжа для точки w^0 удовлетворяли условию нетривиальности (3.68), в котором мы сделали замену $\alpha_i^\varphi h_i = \tilde h_i$, $\alpha_s^\Phi d\mu_s = d\tilde\mu_s$, так что оно приобрело вид (3.71). С учетом того, что $h_i\, m_j \in L_1(\Delta)$, это последнее условие нетривиальности имеет теперь вид:

$$\sum_{\nu=0}^{d(F)} \alpha_\nu + |\beta| + \sum_{i=1}^{d(\varphi)} \int_\Delta h_i(t)\,dt + \sum_{s=1}^{d(\Phi)} \int\limits_\Delta d\mu_s + \|\psi\|_{L_\infty} + \sum_{j=1}^{d(g)} \int_\Delta |m_j(t)|\,dt \;> 0. \tag{3.89}$$

Покажем, что из этого условия можно безболезненно выбросить множители ψ, m_j, т.е. что новое условие

$$\sum_{\nu=0}^{d(F)} \alpha_\nu + |\beta| + \sum_{i=1}^{d(\varphi)} \int_\Delta h_i(t)\,dt + \sum_{s=1}^{d(\Phi)} \int\limits_\Delta d\mu_s \;> 0 \tag{3.90}$$

будет эквивалентно старому (3.89).

Лемма 32. *Если все* $\alpha_\nu = 0$, $\beta = 0$, $h_i(t) = 0$, $d\mu_s(t) = 0$ *(т.е. левая часть (3.90) равна 0), то из условий стационарности по управлению (3.78), сопряженного уравнения (3.86) и трансверсальности (3.88) вытекает, что и все* $m_j(t) = 0$ *и* $\psi(t) = 0$ *(т.е. и левая часть (3.89) равна 0).*

Доказательство. Условие стационарности по управлению имеет в этом случае вид:

$$\psi(t)\, f_u(t) - \sum m_j(t)\, g_{ju}(t) = 0,$$

а сопряженное уравнение и левое условие трансверсальности:

$$-\dot\psi = \psi\, f_x - \sum m_j\, g_{jx}, \qquad \psi(t_0) = 0. \tag{3.91}$$

Так как матрица $g_u(t)$ со строками $g_{ju}(t)$ имеет ограниченную правую обратную $\Lambda(t)$, т.е. $g_u(t)\,\Lambda(t) = E$ (единичная $r \times r-$ матрица), то вектор-строка $m(t) = \psi\, f_u\, \Lambda(t)$ линейно выражается через $\psi(t)$, поэтому, подставив данное выражение в (3.91), получим линейное однородное уравнение относительно ψ с начальным значением $\psi(t_0) = 0$. Тогда $\psi(t) \equiv 0$ на Δ, а следовательно, и $m(t) \equiv 0$ на Δ, ч.т.д. □

Итак, условие нетривиальности можно записывать в виде (3.90).

5. Активные ограничения и условия дополняющей нежесткости. Напомним, что меры $d\mu_s$ сосредоточены на множествах $M_0(\Phi_s) = \{t \in \Delta \mid \Phi_s(x^0(t), t) = 0\}$, что можно записывать также в виде условий дополняющей нежесткости:

$$\Phi_s(t, x^0(t))\, d\mu_s(t) = 0. \tag{3.92}$$

Эти условия позволяют включить в рассмотрение случай, когда для некоторого s $F_s^\Phi(w^0) = \max \Phi_s(t, x^0(t)) < 0$, т.е. случай, когда ограничение $F_s^\Phi(w) \le 0$ активным в точке w^0 не является. (Такое ограничение в условиях локального минимума учитывать не нужно.) Мы можем положить в этом случае в условиях стационарности $d\mu_s = 0$. Условие (3.92) это нам обеспечивает: если $F_s^\Phi(w^0) < 0$, т.е. $\Phi_s(t, w^0(t)) < 0$ на Δ, то из (3.92) следует, что $d\mu_s(t) = 0$ всюду на Δ.

Множители $h_i(t)$ при ограничениях $F_i^\varphi(w) = \operatorname{vraimax} \varphi_i(t, w(t)) \le 0$ удовлетворяют условиям дополняющей нежесткости

$$h_i(t)\, \varphi_i(t, w^0(t)) = 0 \qquad \text{п.в. на } \Delta. \tag{3.93}$$

Если некоторый индекс i не активен, т.е. $F_i^\varphi(w^0) < 0$, то в этом случае мы полагаем $h_i(t) = 0$, и условие (3.93) нам это также обеспечивает.

Наконец, если $F_\nu(p^0) < 0$ для некоторого $\nu \in \{1, ..., d(F)\}$, то мы можем формально включить и это ограничение в условия стационарности, положив $\alpha_\nu = 0$. Условие дополняющей нежесткости

$$\alpha_\nu\, F_\nu(p^0) = 0, \qquad \nu = 1, ..., d(F) \tag{3.94}$$

это равенство автоматически обеспечит. Для активных ограничений это равенство также выполнено автоматически.

Эти простые соображения хорошо известны и используются уже в обычных конечномерных задачах на экстремум.

Итак, общий случай, когда не все ограничения типа неравенства являются активными, учитывается с помощью условий дополняющей нежесткости.

6. Формулировка результата. Подведем итог анализу условий стационарности. Мы доказали следующий результат.

Теорема 48. *Пусть w^0 доставляет слабый минимум в канонической задаче C. Тогда существуют множители Лагранжа*

$$\alpha_\nu,\ \nu=0,\dots,d(F),\quad \beta\in I\!R^{d(K)},\quad \psi(\cdot)\in BV(\Delta,I\!R^n),\quad h(\cdot)\in L_\infty(\Delta,I\!R^{d(\varphi)}),$$
$$m(\cdot)\in L_\infty(\Delta,I\!R^{d(g)}),\quad \mu_s(\cdot)\in BV(\Delta,I\!R^n),\quad s=1,\dots,d(\Phi)$$

такие, что выполнены
(i) условия неотрицательности:

$$\begin{aligned} &\alpha_\nu\ge 0, && \nu=0,\dots,d(F),\\ &h_i(t)\ge 0 && i=1,\dots,d(\varphi),\\ &d\mu_s(t)\ge 0, && s=1,\dots,d(\Phi); \end{aligned} \tag{3.95}$$

(ii) условия дополняющей нежесткости:

$$\begin{aligned} &\alpha_\nu F_\nu(p^0)=0, && \nu=1,\dots,d(F),\\ &h_i(t)\,\varphi_i(t,w^0(t))=0, && i=1,\dots,d(\varphi),\\ &\Phi_s(t,x^0(t))\,d\mu_s(t)=0, && s=1,\dots,d(\Phi), \end{aligned} \tag{3.96}$$

(iii) условие нетривиальности:

$$\sum_{\nu=0}^{d(F)}\alpha_\nu+|\beta|+\sum_{i=1}^{d(\varphi)}\int\limits_\Delta h_i\,dt+\sum_{s=1}^{d(\Phi)}\int\limits_\Delta d\mu_s>0; \tag{3.97}$$

(iv) сопряженное уравнение:

$$-\dot\psi(t)=\overline{H}_x(t,w^0(t)), \tag{3.98}$$

где

$$\overline{H}=\ \psi\,f(t,w)-\sum h_i\,\varphi_i-\sum m_j\,g_j-\sum\frac{d\mu_s}{dt}\,\Phi_s$$

есть расширенная функция Понтрягина,
(v) условия трансверсальности:

$$\psi(t_0)=l_{x_0}(p^0),\qquad -\psi(t_1)=l_{x_1}(p^0), \tag{3.99}$$

где l есть концевая функция Лагранжа:

$$l(p)=\sum_{\nu=0}^{d(F)}\alpha_\nu\,F_\nu(p)+\beta K(p);$$

(vi) условие стационарности функции $\overline{H}$ по u:

$$\overline{H}_u(t,w^0(t))=0. \tag{3.100}$$

Итак, мы получили необходимое условие слабого минимума в канонической задаче C, которое имеет по крайней мере три названия: *условие стационарности*, *локальный принцип максимума*, или *уравнение Эйлера-Лагранжа*. При его выводе мы опирались на необходимые условия локального минимума (условия стационарности) в общей абстрактной задаче на экстремум, полученные в главе 2. Однако мы еще не достигли цели. Наша цель состоит в получении принципа максимума — обобщения условия Вейерштрасса. А результат, который мы пока получили, есть аналог уравнения Эйлера. (Обратим внимание, что в полученном условии стационарности функция Понтрягина H не фигурирует!)

В оптимальном управлении локальный принцип максимума, как и связанный с ним тип минимума – слабый минимум, играют значительно более скромную роль, чем принцип максимума и тот тип минимума, для которого принцип максимума является необходимым условием, то есть понтрягинский минимум. Ситуация здесь существенно отличается от вариационного исчисления, где, наоборот, уравнение Эйлера и слабый минимум занимают главенствующее положение, а условию Вейерштрасса отводится более скромная роль.

Мы переходим к получению основного необходимого условия в оптимальном управлении – принципа максимума. Есть разные пути получения принципа максимума. Мы изберем путь, связанный с так называемыми вариациями скольжения. При этом локальный принцип максимума будем использовать как рабочий аппарат.

Замечание 3.1. Каноническая форма C охватывает более широкий класс задач оптимального управления, чем это может показаться на первый взгляд; многие другие задачи могут быть представлены в виде задачи C с помощью соответствующих замен переменных; некоторые из них приведены в разделе 1.3.

Укажем здесь еще один важный класс задач, сводящихся к задаче С — это т.н. задачи на минимакс, когда вместо функционала $J = F_0(p) \to \min$ надо найти минимум функционала $J = \max_t \Phi_0(t, x(t))$, где $\Phi_0 -$ функция того же класса, что и Φ_s, т.е. ищется $\min \max_t \Phi_0(t, x(t))$ (отсюда и название "минимакс"). Эта задача сводится к канонической задаче С следующим образом. Надо ввести дополнительную фазовую переменную y, подчиненную уравнению $\dot{y} = 0$, ввести фазовое ограничение $\Phi_0(t, x(t)) - y \le 0$, и искать минимум функционала $\widetilde{J} = y(0) \to \min$. Новая задача есть задача типа С. Легко сообразить, что оптимальность траектории (x^0, u^0) в исходной задаче эквивалентна оптимальности траектории $(y^0 = \widetilde{J}(x^0),\, x^0, u^0)$ в новой задаче, и поэтому можно пользоваться полученным условием стационарности. (Выпишите его самостоятельно.)

Аналогичным приемом можно свести к задаче С и задачу на минимум функционала $J = \mathrm{vraimax}_t\ \varphi_0(t, x(t), u(t))$. (Покажите!)

Замечание 3.2. Мы исследовали задачу С в предположении С3 о непрерывности функций f, g, φ и их производных по x, u относительно совокупности переменных $(t, x, u) \in \mathcal{Q}$. Однако непрерывностью по t мы нигде в доказательстве не пользовались, и на самом деле нам достаточно предполагать, что указанные функции зависят от t измеримым образом, а по паре (x, u) они непрерывны равномерно по $t \in \Delta$.

Более точно, вместо предположения С3 можно принять следующее "ослабленное" предположение

$C3'$) Функции f, g, φ имеют вид

$$f(t,x,u) = \tilde{f}(x,u,v^0(t)), \quad g(t,x,u) = \tilde{g}(x,u,v^0(t)), \quad \varphi(t,x,u) = \tilde{\varphi}(x,u,v^0(t)),$$

где $v^0(t) : \Delta \to \mathbb{R}^{d(v)}$ – заданная измеримая ограниченная функция, а вектор-функции $\tilde{f}, \tilde{g}, \tilde{\varphi}$ размерностей $d(f), d(g), d(\varphi)$ определены на некотором открытом множестве $\widetilde{\mathcal{Q}} \subset \mathbb{R}^{n+r+d(v)}$, и на нем сами они и их производные по x, u непрерывны по совокупности переменных (x, u, v). Кроме того, отображение $\pi : (t, x, u) \longmapsto (x, u, v^0(t))$ таково, что $\pi(\mathcal{Q}) \subset \widetilde{\mathcal{Q}}$.

Это на первый взгляд не очень естественное предположение удобно тем, что позволяет включить в рассмотрение задачи с функциями f, g, φ, измеримо зависящими от t. Однако эта измеримая зависимость не произвольна, а получается из непрерывной зависимости некоторых функций $\tilde{f}, \tilde{g}, \tilde{\varphi}$ по v фиксацией измеримой функции $v = v^0(t)$. Именно такая зависимость функций f, g, φ от t понадобится нам в следующей главе. (Можно было бы допустить и более общую измеримую зависимость этих функций по t, но это привело бы нас к весьма громоздким техническим деталям, которые вряд ли бы что добавили и к пониманию сути дела, и даже к общности задачи.)

Если функции f, g, φ непрерывно зависят от t, то можно положить $v^0(t) = t$, и тогда π есть тождественное отображение, $\widetilde{\mathcal{Q}} = \mathcal{Q}$, $\tilde{f} = f$, $\tilde{g} = g$, $\tilde{\varphi} = \varphi$, и необходимость в этих вспомогательных функциях и множестве отпадает.

Таким образом, при выполнении С3 задача С по сути дела получается из задачи $\tilde{C}$, состоящей из концевого блока (3.55)–(3.56) и управляемой системы

$$\begin{gathered}\dot{x} = \tilde{f}(x, u, v), \qquad \tilde{g}(x, u, v) = 0, \qquad \tilde{\varphi}(x, u, v) \le 0, \\ \Phi(t, x) \le 0, \qquad (x_0, x_1) \in \mathcal{P}, \qquad (x, u, v) \in \widetilde{\mathcal{Q}},\end{gathered}$$

путем фиксации некоторого управления $v = v^0(t)$. Предлагаем читателям убедиться, что все проведенные выше рассмотрения задачи С, в том числе доказательство теоремы 48 остаются без изменений при замене предположения $C3$ на $C3'$.

Глава 4

Принцип максимума в общей задаче с фазовыми и регулярными смешанными ограничениями

4.1 Постановка канонической задачи.

На фиксированном отрезке $\Delta = [t_0, t_1]$ будем рассматривать управляемую систему

$$\dot{x} = f(t, x, u, v), \tag{4.1}$$

где, как и прежде, $x \in AC(\Delta, \mathbb{R}^n)$, а управление состоит из двух групп: $u \in L_\infty(\Delta, \mathbb{R}^{r_u})$ и $v \in L_\infty(\Delta, \mathbb{R}^{r_v})$ размерности r_u и r_v соответственно. Заданы ограничения

$$g(t, x, u, v) = 0, \tag{4.2}$$

$$\varphi_i(t, x, u, v) \le 0, \qquad i = 1, \ldots, d(\varphi), \tag{4.3}$$

$$\Phi_s(t, x) \le 0, \qquad s = 1, \ldots, d(\Phi), \tag{4.4}$$

и на управление v наложено ограничение типа включения

$$v(t) \in V(t) \qquad \text{почти всюду}, \tag{4.5}$$

где $V(t)-$ произвольное многозначное отображение $\Delta \to \mathbb{R}^{r_v}$. (Как мы позже увидим, можно считать, что оно измеримо и имеет замкнутые образы.) Таким образом, по сравнению с предыдущей задачей компоненты управления разбиты теперь на две группы:

$$u \in \mathbb{R}^{r_u}, \qquad v \in \mathbb{R}^{r_v}, \qquad r_u + r_v = r.$$

Смысл такого разделения в том, что по управлению u все функции будут у нас гладкими, и мы будем их дифференцировать по u; относительно же v гладкости не предполагается, дифференцировать нельзя, но зато на v допускается ограничение типа включения (4.5). (Такое ограничение называют также *нефункциональным*, поскольку оно, в отличие от ограничений (4.2), (4.3), не задается гладкими функциями от t, x, u, v).

Ограничения (4.4) называются фазовыми, а (4.2) и (4.3) — смешанными. Относительно смешанных ограничений мы примем ниже некоторые предположения регулярности.

Добавив к системе ограничений (4.1)–(4.5) стандартный концевой блок

$$J = F_0(p) \to \min, \tag{4.6}$$

$$F_\nu(p) \le 0, \qquad \nu = 1, \ldots, d(F), \tag{4.7}$$

$$K(p) = 0, \tag{4.8}$$

где, как и раньше, $p = (x_0, x_1)$, а также уже знакомые нам условия принадлежности

$$p \in \mathcal{P}, \qquad (t, x, u, v) \in \mathcal{Q}, \tag{4.9}$$

где $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^{2n}$, $\mathcal{Q} \subset \mathbb{R}^{1+n+r}$ — открытые множества, задающие "жизненное пространство" задачи, мы получаем задачу оптимального управления, которую будем называть *канонической задачей с фазовыми и регулярными смешанными ограничениями* (для краткости – задачей D).

Не совсем привычное разбиение вектора управлений на две группы — "гладкую" u и "негладкую" v — имеет на самом деле большие преимущества. В каждой конкретной задаче это разбиение как правило неоднозначно, и его выбор находится в руках исследователя. Связано это с тем, что нефункциональное ограничение (4.5) зачастую задается все-таки с помощью гладких ограничений вида $a(t, v) = 0$ и $b(t, v) \le 0$, и поэтому оно может быть отнесено как к гладкой группе (4.2), (4.3), так и к негладкой (4.5). При этом одна из групп может отсутствовать, т.е. все управление может быть целиком отнесено либо к u, либо к v. Например, в классической понтрягинской задаче, рассмотренной в главе 1, управление имеет тип v, а группа u отсутствует.

Допустимой траекторией (или процессом) задачи D будем называть тройку функций $x(t), u(t), v(t)$, для которой выполнены все ограничения (4.1)–(4.5), (4.7), (4.8), и существует компакт $\Omega \subset Q$, такой что

$$(t, x(t), u(t), v(t)) \in \Omega \qquad \text{почти всюду на} \quad \Delta \tag{4.10}$$

(т.е. "жизненное ограничение" выполнено с некоторым запасом).

Предположения.

D1) Функции F, K аргумента $p \in \mathbb{R}^{2n}$ непрерывно дифференцируемы на $\mathcal{P}$;

D2) функции f, g, φ, Φ непрерывны на $\mathcal{Q}$ вместе со своими первыми производными по x, u. (Здесь функция Φ формально считается зависящей от t, x, u.)

Эти предположения вполне естественны и выполняются в подавляющем большинстве встречающихся в математической практике задач. Помимо них, примем также следующее

D3) (предположение о регулярности смешанных ограничений)

Во всех точках $(t, x, u, v) \in \mathcal{Q}$ таких, что

$$g(t, x, u, v) = 0, \qquad \varphi(t, x, u, v) \le 0, \qquad \Phi(t, x) \le 0,$$

градиенты по u функций g_j, $j = 1, \ldots, d(g)$ и активных функций φ_i, $i \in I(t, x, u, v)$

линейно-позитивно независимы, т.е. не существует нетривиального набора коэффициентов $\beta_j,\ j = 1,\dots,d(g),\ \ \alpha_i,\ i \in I = I(t,x,u,v),$ из которых все $\alpha_i \ge 0,$ таких что

$$\sum_{j=1}^{d(g)} \beta_j\, g'_{ju}(t,x,u,v) \ + \ \sum_{i\in I} \alpha_i\, \varphi'_{iu}(t,x,u,v) \ = 0.$$

Здесь $I(t,x,u,v) \ = \ \{\, i \ \in \ \{1,\dots,d(\varphi)\}\,|\ \varphi_i(t,x,u,v) \ = \ 0\,\}$ есть множество активных индексов для смешанных ограничений неравенства.

По сути дела, это основное и единственное существенное предположение, при котором мы беремся исследовать задачу D. Как уже говорилось, если оно не выполнено, то исследование задачи, и даже получающийся ответ становятся на порядок сложнее и пока вряд ли могут быть рекомендованы для первоначального изучения, каковому посвящена данная книга. Заинтересованного читателя мы отсылаем к статье Дубовицкого и Милютина [4] и уже упоминавшейся книге Милютина [23].

Относительно исследуемой траектории (процесса) $x^0(t), u^0(t), v^0(t)$ примем, как и в главе 3, следующие два предположения:

D4) существует компакт $\Omega \subset Q,$ такой что

$$(t, x^0(t), u^0(t), v^0(t)) \in \Omega \qquad \text{почти всюду на} \quad \Delta\,; \tag{4.11}$$

D5) концы траектории $x^0(t)$ лежат строго внутри всех фазовых ограничений:

$$\Phi_s(t_0,\, x^0(t_0)) < 0, \qquad \Phi_s(t_1,\, x^0(t_1)) < 0, \qquad \forall\, s = 1,\dots,d(\Phi).$$

Последнее предположение сделано для того, чтобы исключить тривиальный случай, когда условие стационарности выполнено лишь за счет взаимодействия фазового ограничения с концевым блоком задачи, без учета управляемой системы.

Итак, задача D поставлена и предположения D1–D5 приняты.

Замечание 4.1. Как и в задаче A главы 1, можно, следуя Понтрягину, рассматривать более общую зависимость от v — считать, что v не обязательно принадлежит $\mathbb{R}^{r_v},$ а есть элемент произвольного хаусдорфова топологического пространства $\mathcal{V},$ а все функции от (t,x,u,v) считать определенными на множестве $\mathcal{Q} \in \mathbb{R}^{1+n+r_u} \times \mathcal{V}$ и непрерывными на этом множестве вместе со своими первыми производными по $(x,u,v).$ При этом на каждом допустимом процессе (x,u,v) управление $v(t)$ должно почти всюду содержаться в некотором компакте $C \subset \mathcal{V}$ (зависящем от процесса). Ничего из нижеследующего анализа при этом не изменится. Поэтому, чтобы не отвлекаться на несущественные моменты (а также в силу того обстоятельства, что практически во всех задачах управление есть все-таки конечномерный вектор), мы оставляем $\mathcal{V} = \mathbb{R}^{r_v}$.

Замечание 4.2. Каноническую задачу мы рассматриваем на фиксированном отрезке времени. Задача вида (4.1)–(4.9) с нефиксированным временем легко сводится к задаче на фиксированном времени при условии, что функции f, g, φ, Φ гладко зависят от $t.$ Это будет сделано позже, в §4.9, а пока мы сосредоточимся на исследовании поставленной задачи.

4.2 Формулировка Принципа максимума.

Сформулируем теперь необходимое условие оптимальности для задачи D, или точнее — необходимое условие понтрягинского минимума в этой задаче.

Так как фазовое ограничение $\Phi_s(t,x) \le 0$ есть ограничение в пространстве непрерывных функций, то множитель Лагранжа при нем есть неотрицательная мера Радона $d\mu_s(t)$, которая порождается монотонно неубывающей функцией $\mu_s(t)$, $t \in [t_0,t_1]$. Чтобы не уточнять, какое именно значение функция μ_s имеет в точках разрыва и в концах отрезка, будем считать, что она определена на некотором интервале, содержащем отрезок $[t_0,t_1]$; тогда мера каждой отдельной точки t есть $\mu(t+0)-\mu(t-0)$, а мера всего отрезка $[t_0,t_1]$ есть $\mu(t_1+0)-\mu(t_0-0)$.

Пусть $x^0(t), u^0(t), v^0(t)$ есть допустимый процесс задачи D. В частности, для него выполнено условие (3.61) с некоторым компактом $\Omega \subset \mathcal{Q}$.

Теорема 44. (Принцип максимума для задачи D).
Пусть траектория $x^0(t), u^0(t), v^0(t)$ доставляет понтрягинский минимум в задаче D. Тогда найдется набор чисел $\alpha = (\alpha_0,\dots,\alpha_{d(F)}) \ge 0$, вектор $\beta \in I\!R^{d(K)}$, $n-$ мерная функция ограниченной вариации $\psi(t)$, непрерывная в концах отрезка, монотонно неубывающие функции $\mu_s(t)$, $s=1,\dots,d(\Phi)$ (порождающие меры Радона $d\mu_s(t)$), также непрерывные в концах отрезка, функции $h_i(t) \ge 0$ из $L_\infty(\Delta)$, $i=1,\dots,d(\varphi)$, и вектор-функция $m(t) \in L_\infty(\Delta)$ размерности $d(g)$, для которых выполнены следующие условия:

а) условие нетривиальности

$$|\alpha| + |\beta| + \sum_s |\mu_s(t_1)-\mu_s(t_0)| \;+\; \sum_i \int_\Delta h_i(t)\,dt \;>0, \tag{4.12}$$

б) условия дополняющей нежесткости

$$\begin{gathered} \alpha_\nu F_\nu(p^0) = 0, \qquad \nu = 1,\dots,d(F), \\ d\mu_s(t)\,\Phi_s(t,x^0(t)) \,\equiv 0, \qquad \forall\, s, \\ h_i(t)\,\varphi_i(t,x^0(t),u^0(t),v^0(t)) = 0 \qquad \textit{почти всюду}\,, \quad \forall\, i, \end{gathered} \tag{4.13}$$

в) сопряженное уравнение

$$-\dot\psi = \;\overline{H}_x = \;\psi\, f_x - h\,\varphi_x - m\,g_x - \dot\mu\,\Phi_x\,, \tag{4.14}$$

(его смысл пояснен в §3.7; все функции берутся вдоль траектории (x^0,u^0,v^0)), где $\overline{H}(t,x,u,v) = (\psi,f)-(h,\varphi)-(m,g)-(\dot\mu,\Phi)$ — расширенная функция Понтрягина,

г) условия трансверсальности

$$\psi(t_0) = l_{x_0}(p^0), \qquad \psi(t_1) = -l_{x_1}(p^0), \tag{4.15}$$

где $l(p) = \alpha_0 F_0(p) + \sum \alpha_\nu F_\nu(p) + (\beta, K(p))$ — концевая функция Лагранжа,

д) условие стационарности (уравнение Эйлера–Лагранжа) по u :

$$\overline{H}_u = \;\psi f_u - h\varphi_u - m g_u = 0 \tag{4.16}$$

вдоль траектории (x^0, u^0, v^0), *и наконец,*

e) условие максимума: для любой измеримой пары $u(t), v(t)$, *удовлетворяющей почти всюду на* Δ *ограничениям*

$$\begin{gathered}\varphi(t, x^0(t), u(t), v(t)) \le 0,\\ g(t, x^0(t), u(t), v(t)) = 0, \\ v(t) \in V(t),\end{gathered} \tag{4.17}$$

и такой, что существует компакт $\tilde{\Omega} \subset \mathcal{Q}$, *для которого*

$$(t, x^0(t), u(t), v(t)) \in \tilde{\Omega} \qquad \textit{почти всюду на} \quad \Delta, \tag{4.18}$$

почти всюду на Δ *выполнено неравенство*

$$H(t, x^0(t), u(t), v(t)) \le H(t, x^0(t), u^0(t), v^0(t)), \tag{4.19}$$

где $H = (\psi, f(t,x,u,v))$ *— функция Понтрягина.*

Если многозначное отображение $V(t)$ *измеримо (в частности, если оно не зависит от* t *), то условие e) эквивалентно следующему обычному условию максимума функции Понтрягина:*

e′) для почти всех $t \in \Delta$

$$\max_{(u,v)\in C(t)\cap Q(t)} H(t, x^0(t), u, v) \;=\; H(t, x^0(t), u^0(t), v^0(t)), \tag{4.20}$$

где

$$C(t) = \{\, (u,v) \in \mathbb{R}^{r_u + r_v} \mid \varphi(t, x^0(t), u, v) \le 0, \quad g(t, x^0(t), u, v) = 0, \quad v \in V(t)\,\},$$

а $\quad Q(t) = \{\, (u,v) \in \mathbb{R}^{r_u + r_v} \mid \ (t, x^0(t), u, v) \in \mathcal{Q}\,\}$,

т.е. $C(t) \cap Q(t)$ *— множество управлений, допустимых к сравнению в момент* t *для траектории* $x^0(t)$.

Замечание 4.3. Многозначное отображение $V : \Delta \to \mathbb{R}^r$ называется измеримым, если для любого открытого (а тогда и любого борелевского) множества $\mathcal{B} \subset \mathbb{R}^n$ множество $\{t \in \Delta \mid V(t) \cap \mathcal{B} \ne \emptyset\,\}$ измеримо. Как и понятие измеримой (однозначной) функции, это понятие охватывает практически любые многозначные отображения, которые могут встретиться в математической практике (а тем более в прикладных задачах). Поэтому мы не останавливаемся здесь на детальном изучении свойств многозначных отображений, отсылая заинтересованного читателя к книгам [13, 15] и статье [14].

Замечание 4.4. В силу непрерывности функции H в условии максимума (4.20) множество $C(t)$ можно заменить на его замыкание $\overline{C}(t)$. Однако в определении самого множества $C(t)$ заменить множество $V(t)$ на $\overline{V}(t)$ вообще говоря нельзя, так как для замкнутого множества F и произвольного множества V имеет место лишь включение $\overline{F \cap V} \subset F \cap \overline{V}$, но обратного включения вообще говоря нет. (У нас $C = F \cap V$, где F задано ограничениями $\varphi \le 0$, $g = 0$.)

Это обратное включение можно гарантировать, например, в следующем частном случае — когда V выпукло, φ выпукла по v, а g линейна по v, и для любой тройки

$(t,u,v) \in F(t) \cap V(t)$ найдется вектор $\hat{v} \in reint\, V(t)$, для которого $\varphi(t,x^0(t),u,\hat{v}) < 0$, $g(t,x^0(t),u,\hat{v}) = 0$. В этом случае в определении множества $C(t)$ можно заменить $V(t)$ на $\overline{V}(t)$. (Покажите!)

Замечание 4.5. Как мы помним, в формулировке ПМ для понтрягинской задачи (см. главу 1) имеется еще одно сопряженное уравнение ("закон сохранения энергии"):

$$\dot{H} \;=\; H_t, \qquad \text{т.е.} \qquad \frac{dH}{dt} \;=\; \frac{\partial H}{\partial t}\,,$$

В эквивалентной форме оно имеет вид $\dot{\psi}_t = -H_t$, где по определению $\psi_t = -H$. Для нашей задачи с фазовыми и смешанными ограничениями это уравнение, по аналогии с (4.14), должно иметь вид

$$-\dot{\psi}_t = \;\overline{H}_t \;=\; \psi\, f_t - h\,\varphi_t - m\,g_t - \dot{\mu}\,\Phi_t\,, \tag{4.21}$$

которого у нас нет. Действительно, с помощью вариаций "скольжения" это условие не получается, и вообще говоря оно не следует из других условий приведенного здесь ПМ, хотя бы потому, что в задаче D гладкости по t не предполагается, и поэтому производной по t может не существовать. Более того, и для гладкой по t задачи это условие не вытекает из остальных: имеется пример задачи D, принадлежащий А.А.Милютину [6], в котором все функции задачи гладкие по t, траектория удовлетворяет ПМ (a)–(e), но условие (4.21) нарушается. Можно показать (см. [6]), что это условие действительно вытекает из вышеприведенных условий (a)–(e) (для гладкой по t задачи), если предположить, что градиенты по u смешанных ограничений (4.2), (4.3) *линейно независимы*, а не только линейно-позитивно независимы, как предположено в нашей задаче D.

Условие (4.21) есть результат вариаций вдоль оси времени t, а те вариации, которые мы будем использовать для доказательства теоремы 44, не меняют время (оставляют каждый момент времени неподвижным), поэтому неудивительно, что мы не получим этого условия. Однако для гладкой по t задачи можно, имея доказанной теорему 44, расширить далее класс используемых вариаций, включив в него и вариации по t. Это достигается простым приемом введения дополнительного (фиктивного) времени, и отнесением переменной t к числу фазовых переменных (см. раздел 4.6). Применяя к новой задаче теорему 44, мы получим ПМ для исходной задачи D уже в полном объеме — как условия (a)–(e), так и условие (4.21). Но сначала мы должны доказать теорему 44.

Доказательство теоремы 44 будет проведено с помощью т.н. "скользящих режимов". Точнее даже сказать так: теорема 44 представляет собой необходимое условие оптимальности *в классе скользящих режимов.* Скользящие режимы были введены в оптимальное управление В.Ф.Кротовым, Р.В.Гамкрелидзе, Дж.Варгой и др. (а еще ранее, в задачах КВИ, использовались Л.Янгом, Н.Н.Боголюбовым и Э.Мак-Шейном) как прием перехода от управляемой системы с невыпуклым множеством скоростей к его овыпуклению. Идея об использовании скользящих режимов в качестве *класса вариаций* (т.н. вариаций скольжения) для получения необходимых условий оптимальности была впервые предложена А.А.Милютиным. Им же была намечена и вся схема доказательства, которой мы здесь следуем. Это доказательство довольно прозрачно; оно состоит из нескольких относительно автономных частей, каждая из которых представляет собой некоторый факт функционального анализа, имеющий самостоятельный интерес, в силу чего это доказательство может быть интересно не только специалистам по теории управления. Как и в главе 1, мы будем следовать той схеме получения необходимых условий оптимальности, согласно которой надо рассмотреть семейство присоединенных "гладких" задач;

показать, что из оптимальности в исходной задаче следует стационарность в каждой присоединенной задаче; в каждой присоединенной задаче выписать условие стационарности (необходимое условие первого порядка), и затем, собрав все эти условия, как бы "спрессовать" их в единый общий результат.

Основные пункты доказательства таковы:

а) стационарность в классе равномерно малых вариаций,
б) лемма об отсутствии сингулярных составляющих у множителей Лагранжа,
в) формулировка присоединенной задачи в классе скользящих режимов,
г) аппроксимационная теорема для ограничений равенства,
д) лемма об L_1- расстоянии до почти крайней точки,
е) теорема о корректности перехода к присоединенной задаче,
ж) теорема о стационарности в присоединенной задаче,
з) конечнозначный ПМ,
и) глобальный ПМ.

Первые два пункта были рассмотрены в главе 3, поэтому перейдем сразу к пункту в).

4.3 Семейство присоединенных задач

Пусть $(x^0(t), u^0(t), v^0(t))$ – процесс, доставляющий понтрягинский минимум в задаче D, и пусть его график содержится в некотором компакте $\Omega \subset \mathcal{Q}$.

Обозначим для дальнейшего удобства $u_1^0 = u^0$, $v_1^0 = v^0$. Возьмем любое натуральное N и любые функции $u_2^0(t), \ldots, u_N^0(t)$, $v_2^0(t), \ldots, v_N^0(t)$ из $L_\infty^{r_u}(\Delta)$, $L_\infty^{r_v}(\Delta)$ соответственно, такие что $\forall\, k$ тройка $(x^0(t), u_k^0(t), v_k^0(t))$ удовлетворяет поточечным ограничениям (4.17) и "жизненному" ограничению (4.10) задачи D с некоторым компактом Ω_k , и рассмотрим новую задачу E, которую будем называть *присоединенной*:

$$\psi \mid \qquad \dot x = \sum_{k=1}^{N} \alpha_k(t)\, f(t, x(t), u_k(t), v_k^0(t)), \tag{4.22}$$

$$\dot\mu_s \mid \qquad \Phi_s(t, x(t)) \le 0, \qquad s = 1, \ldots, d(\Phi), \tag{4.23}$$

$$m_k \mid \qquad g(t, x(t), u_k(t), v_k^0(t)) = 0, \qquad k = 1, \ldots, N, \tag{4.24}$$

$$h_k \mid \qquad \varphi(t, x(t), u_k(t), v_k^0(t)) \le 0, \qquad k = 1, \ldots, N, \tag{4.25}$$

$$\omega_k \mid \qquad \alpha_k(t) \ge 0, \qquad k = 1, \ldots, N, \tag{4.26}$$

$$\theta \mid \qquad \sum_{k=1}^{N} \alpha_k(t) = 1, \tag{4.27}$$

$$a_0 \mid \qquad J = F_0(p) \to \min, \tag{4.28}$$

$$a_\nu \mid \qquad F_\nu(p) \le 0, \qquad \nu = 1, \ldots, d(F), \tag{4.29}$$

$$b \mid \qquad K(p) = 0, \tag{4.30}$$

$$p \in \mathcal{P}, \qquad (t, x(t), u_k(t), v_k^0(t)) \in \mathcal{Q}. \tag{4.31}$$

Слева здесь написаны множители Лагранжа, соответствующие всем ограничениям задачи и функционалу, которые далее будут участвовать в условиях стационарности. (Напомним, что открытые включения (4.31) — это не ограничения, а область определения, или, как мы говорим, "жизненное пространство" задачи.)

Управлениями в этой задаче являются наборы

$$\overrightarrow{u} = (u_1, \dots, u_N) \in (L_\infty^{d(u)})^N, \qquad \overrightarrow{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_N) \in L_\infty^N. \tag{4.32}$$

Набор $\overrightarrow{v}^0 = (v_1^0, \dots, v_N^0) \in (L_\infty^{d(v)})^N$ фиксирован, он не варьируется. Таким образом, траектория задачи E — это любой набор $(x, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{\alpha})$, который мы будем называть *мультитройкой*. В задаче E нас будет интересовать траектория

$$(x^0(t),\ \overrightarrow{u}^0(t),\ \overrightarrow{\alpha}^0(t)), \qquad \text{где} \qquad \overrightarrow{\alpha}^0(t) = (1, 0, \dots, 0).$$

Мы покажем, что из наличия понтрягинского минимума на тройке (x^0, u^0, v^0) в задаче D вытекает стационарность мультитройки $(x^0, \overrightarrow{u}^0, \overrightarrow{\alpha}^0)$ в задаче E.

Так как коэффициенты $\alpha_k(t)$ удовлетворяют ограничениям (4.26), (4.27), то правая часть уравнения (4.22) соответствует овыпуклению набора функций $f(t, x(t), u_k(t), v_k^0(t))$. В инженерных задачах движение по решению системы (4.22) называют *скользящим режимом.*

Замечание 4.6. При отсутствии v задача E является расширением исходной задачи D, поскольку в ней добавились новые управления $u_2, \dots, u_N$; при наличии же v расширения, вообще говоря, не происходит, так как управления v_k^0 в задаче E не варьируются.

Таким образом, для каждого набора управлений $\overrightarrow{u}^0(t)$ и $\overrightarrow{v}^0(t)$ (в которых первые компоненты совпадают с исходными оптимальными управлениями задачи D: $u_1^0 = u^0$, $v_1^0 = v^0$) мы получаем свою задачу E, которую будем иногда обозначать $E(\overrightarrow{u}^0, \overrightarrow{v}^0)$.

Нетрудно видеть, что ограничения задачи E гладко зависят от ее управлений $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{\alpha}$, поэтому к ней применимы результаты главы 3.

Прежде всего проверим, что смешанные ограничения (4.24)–(4.27) задачи E регулярны. (С формальной точки зрения ограничение (4.26) надо записать в стандартном виде $-\alpha_k(t) \le 0$.) Действительно, так как по u_k эти ограничения распадаются, то в силу предположения D3 $\forall\, k$ их градиенты по u_k позитивно-линейно независимы в любой точке, где $g = 0$, $\varphi_i \le 0$ (при этом надо, конечно, брать только активные индексы i), а независимые от них ограничения на α_k (4.26)–(4.27), задающие симплекс в $\mathbb{R}^N$, являются позитивно-линейно независимыми очевидным образом (проверьте!). Таким образом, согласно § 4.5, локальный принцип максимума для задачи D не будет содержать сингулярных составляющих.

Для установления связи между задачами D и E нам потребуется одно довольно интересное свойство нормы пространства $L_1(\Delta)$.

Пусть A есть замкнутый ограниченный многогранник в $\mathbb{R}^N$. Рассмотрим множество всех вектор-функций $\alpha(t)$ из $L_1^N(\Delta)$, значения которых $\alpha(t) \in A$ почти всюду на Δ; обозначим его $\mathcal{A}$.

Лемма 35. (ОБ L_1- РАССТОЯНИИ ДО ПОЧТИ КРАЙНЕЙ ТОЧКИ).

Пусть e есть одна из вершин многогранника A, и функция $\alpha \in \mathcal{A}$ такова, что $\int |\alpha(t) - e|\, dt \le \delta$, где $\delta > 0$. Пусть дана последовательность функций $\alpha^{(n)} \in \mathcal{A}$, слабо сходящаяся к α (т.е. $\alpha_k^{(n)} \xrightarrow{сл} \alpha_k \quad \forall\, k = 1, \dots, N$ относительно функций из L_∞). Тогда при больших n

$$|| \, \alpha^{(n)} - \alpha \, ||_1 \; \le \; C \, \delta \, ,$$

где константа C зависит только от многогранника A и не зависит от функций $\alpha^{(n)}(t),\ \alpha(t)$.

Доказательство проведем сначала для простейшего частного случая, в котором оно совершенно прозрачно.

Пусть $N = 1, \quad A = [0, 1], \quad e = 0.$ Тогда по условию функция $\alpha(t) \in [0, 1]$ такова, что $\int \alpha(t)\, dt \le \delta,$ а последовательность $\alpha^n(t)$ такова, что

$$0 \le \alpha^n(t) \le 1, \qquad \text{и} \qquad \alpha^n \xrightarrow{\text{сл}} \alpha.$$

Заметим, что для неотрицательных функций $\bar\alpha(t) \ge 0$ норма пространства $L_1(\Delta)$ есть линейный функционал:

$$|| \, \bar\alpha \, ||_1 \; = \; \int_\Delta \bar\alpha(t)\, dt.$$

(По сути, это ключевой факт, на котором и основано доказательство.)
Из этого соображения и условия леммы получаем

$$||\alpha^{(n)} - \alpha||_1 \; \le \; ||\alpha^{(n)}||_1 + ||\alpha||_1 \; = \; \int \alpha^{(n)}\, dt + \int \alpha\, dt =$$

$$= \int (\alpha^{(n)} - \alpha)\, dt \; + \; 2 \int \alpha\, dt \; < 3\delta$$

при больших n. (Первый интеграл в последней строке меньше δ в силу слабой сходимости $\alpha^{(n)} - \alpha \to 0$.)

Для доказательства в общем случае надо заметить, что для любого многогранника A и любой его вершины e всегда найдется единичный вектор $p \in \mathbb{R}^N$ и такое число $\gamma > 0$, что для всех $a \in A$ имеется оценка

$$| \, a - e \, | \; \le \; \gamma \, (p, \, a - e).$$

(Докажите! Это вытекает из того, что касательный конус к многограннику в любой его вершине является острым. Последнее эквивалентно тому, что конус внешних нормалей $N_a(e)$ имеет непустую внутренность. При этом в качестве p можно взять любой вектор из $int\, N_A(e)$.)

При наличии указанной оценки имеем

$$||\alpha^{(n)} - \alpha||_1 \le ||\alpha^{(n)} - e||_1 + ||\alpha - e||_1 \le$$

$$\le \gamma \int (p, \alpha^{(n)} - e)\, dt \; + \; \gamma \int (p, \alpha - e)\, dt =$$

$$= \gamma \int (p, \alpha^{(n)} - a)\, dt \; + \; 2\gamma \int (p, \alpha - e)\, dt <$$

$$< \delta + 2\gamma||\alpha - e||_1 \; < (1+2\gamma)\,\delta.$$

Осталось положить $C = 1 + 2\gamma$. $\square$

Мы будем применять эту лемму к симплексу

$$A = \; \{\, \alpha \in \mathbb{R}^N \mid \; \alpha_k \geq 0 \;\; \forall\, k, \quad \sum \alpha_k = 1\,\}.$$

Замечание 4.7. Эта лемма очевидно остается справедливой, если вершина e зависит от t. (Достаточно разбить отрезок Δ на конечное число измеримых множеств, на каждом из которых вершина постоянна.) Более того, она допускает и следующую общую формулировку.

Лемма 36. *Пусть $A(t)-$ произвольный выпуклый компакт в $\mathbb{R}^N$, измеримо зависящий от $t \in \Delta$ и для п.в. t содержащийся в шаре радиуса $\rho(t) \in L_1(\Delta)$, и пусть $ex\,A(t)$ есть множество его крайних точек. Пусть, далее, почти всюду $\alpha(t) \in A(t)$ и $dist\,(\alpha(t), ex\,A(t)) \;\leq\; \xi(t) \;\in\; L_1(\Delta)$, причем $\int \xi(t)\,dt \;=\; \delta \;>\; 0$, $\alpha^{(n)}(t) \;\in\; A(t)$ и $\alpha^{(n)} \xrightarrow{сл} \alpha$ (слабо в L_1 относительно L_∞).*
Тогда при больших n

$$||\,\alpha^{(n)} - \alpha\,||_1 \;\leq\; f(\delta), \tag{4.33}$$

где $f-$ некоторая функция, определяемая только многозначным отображением $A(t)$, такая что $f(\delta) \to 0$ при $\delta \to 0$.

Доказательство мы опускаем. (Читатель может рассматривать его как задачу со звездочкой для самостоятельного решения.)

Отметим здесь также полезное следствие из леммы 36.

Лемма 37. *Пусть, как и выше, $A(t)-$ выпуклый компакт в $\mathbb{R}^N$, измеримо зависящий от $t \in \Delta$, содержащийся в шаре радиуса $\rho(t) \in L_1(\Delta)$. Пусть почти всюду $\alpha(t) \in ex\,A(t)$, $\alpha^{(n)}(t) \in A(t)$ и $\alpha^{(n)} \xrightarrow{сл} \alpha$. Тогда $||\alpha^{(n)} - \alpha||_1 \to 0$.*

Таким образом, если последовательность функций принимает значения в выпуклом компакте и слабо сходится к его крайней точке, то она сходится к ней по норме L_1 . Для доказательства надо лишь заметить, что условие леммы 36 здесь выполнено с любым $\delta > 0$, и тогда из неравенства (4.33) вытекает требуемая сходимость.

Леммы 36 и 37 в данной книге не используются; мы привели их лишь для полноты изложения как интересные факты.

Помимо леммы 35, для установления связи между задачами D и E нам потребуется следующее важное свойство ограничений равенства задачи E.

Теорема 45 (аппроксимационная). *Пусть мультитройка $\rho = (x, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{\alpha})$ удовлетворяет всем ограничениям равенства (4.22), (4.24), (4.27), (4.30) задачи E.*
Предположим, что

a) $\quad \operatorname*{vraimin}_t \alpha_k(t) > 0 \qquad \forall\, k = 1, \ldots, N,$

т.е. существует такое $\delta > 0$, что для п.в. t относительная $\delta-$ окрестность точки $\alpha(t)$ содержится в симплексе A;

б) оператор P, задающий ограничения равенства (4.22), (4.24), (4.27), (4.30), удовлетворяет в данной точке $(x, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{\alpha})$ условию Люстерника.

Тогда существует последовательность мультитроек $\rho^{(n)} = (x^{(n)}, \overrightarrow{u}^{(n)}, \overrightarrow{\alpha}^{(n)})$, также удовлетворяющая всем ограничениям равенства (4.22), (4.24), (4.27), (4.30), такая что

$$||x^{(n)} - x||_C \to 0, \qquad ||\overrightarrow{u}^{(n)} - \overrightarrow{u}||_\infty \to 0, \tag{4.34}$$

$$(\overrightarrow{\alpha}^{(n)} - \overrightarrow{\alpha}) \to 0 \qquad \text{слабо} - *, \tag{4.35}$$

и при этом каждая функция $\alpha_k^{(n)}(t)$ принимает не более двух значений: 0 и 1 (т.е. $\forall n$ для п.в. t вектор $\overrightarrow{\alpha}^{(n)}(t)$ есть одна из вершин симплекса A).

Доказательство этой теоремы довольно сложно. Чтобы не прерывать изложение основной темы данной главы, мы отнесли его в Приложение.

Подчеркнем, что эта теорема относится не ко всей задаче E, а лишь к ограничениям равенства этой задачи, поэтому она представляет интерес не только при исследовании задачи E, но и вообще при изучении нелинейных управляемых систем. Свойство, которое в ней устанавливается, можно назвать корректностью перехода от исходной управляемой системы к ее расширению с помощью скользящих режимов. (В зарубежной литературе подобные свойства называются иногда релаксационными теоремами.)

Поскольку каждая функция $\alpha_k^{(n)}(t)$ в теореме 45 есть характеристическая функция некоторого измеримого множества $E_k^{(n)} \subset \Delta$, где $E_1^{(n)}, \ldots, E_N^{(n)}$ есть некоторое разбиение отрезка Δ, или, что то же самое, $\overrightarrow{\alpha}^{(n)}(t)$ для п.в. t есть вершина симплекса A, то, построив управления

$$\begin{aligned} u^{(n)}(t) &= \textstyle\sum_k \alpha_k^{(n)}(t)\, u_k^{(n)}(t), \\ v^{(n)}(t) &= \textstyle\sum_k \alpha_k^{(n)}(t)\, v_k^0(t), \end{aligned} \tag{4.36}$$

мы получаем тройку $\tau^{(n)} = (x^{(n)}(t), u^{(n)}(t), v^{(n)}(t))$, удовлетворяющую уравнению (4.1) и всем остальным ограничениям равенства задачи D. Таким образом, траектория $(x, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{\alpha})$ расширенной системы (4.22), (4.24), (4.27), (4.30) "приближается" траекториями $(x^{(n)}, u^{(n)}, v^{(n)})$ исходной системы (4.1), (4.2), (4.8). При этом $J_D(\tau^{(n)}) = J_E(\rho^{(n)})$, поскольку фазовая компонента $x^{(n)}$ у них одна и та же.

Отсюда с учетом (4.34) вытекает следующая теорема, устанавливающая связь задачи E с задачей D.

Теорема 46. *Пусть тройка $\tau^0 = (x^0, u^0, v^0)$ доставляет понтрягинский минимум в задаче D, и пусть мультитройка $\rho^0 = (x^0, \overrightarrow{u}^0, \overrightarrow{\alpha}^0)$, где*

$$\overrightarrow{u}^0 = (u_1^0, \ldots, u_N^0), \qquad u_1^0 = u^0, \qquad \overrightarrow{\alpha}^0 = (1, 0, \ldots, 0), \tag{4.37}$$

удовлетворяет всем ограничениям задачи $E = E(\overrightarrow{u}^0, \overrightarrow{v}^0)$, а ограничения равенства (4.22), (4.24), (4.27), (4.30) этой задачи удовлетворяют условию Люстерника в точке ρ^0. Тогда для этой мультитройки выполнена $s-$ необходимость в задаче E, и следовательно, она стационарна в задаче E.

(Определение $s-$ необходимости было дано в §2.4.)

Доказательство. Допустим, что $s-$ необходимость для ρ^0 не выполнена. По определению это означает, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется мультитройка $\rho = (x, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{\alpha})$, такая что

$$||x - x^0||_C + \sum_k ||u_k - u_k^0||_\infty + \sum_k ||\alpha_k - \alpha_k^0||_\infty < \varepsilon, \tag{4.38}$$

которая удовлетворяет всем ограничениям равенства задачи E, строго удовлетворяет всем ограничениям неравенства задачи E, т.е. при некотором $\delta > 0$

$$\alpha_k(t) \ge \delta > 0 \qquad \forall\, k, \tag{4.39}$$

$$\Phi_s(t, x(t)) \le -\delta < 0 \qquad \forall\, s, \tag{4.40}$$

$$\varphi_i(t, x(t), u_k(t), v_k^0(t)) \le -\delta < 0 \qquad \forall\, i,\ \forall\, k \tag{4.41}$$

$$F_\nu(p) \le -\delta \qquad \forall\, \nu, \tag{4.42}$$

и строго понижает функционал:

$$J(p) \ \le\ J(p^0) - \delta\,. \tag{4.43}$$

Таким образом, все ограничения неравенства задачи E выполнены с некоторым запасом δ. При этом в силу (4.39) вектор $\overrightarrow{\alpha}(t)$ лежит равномерно внутри симплекса A, а в силу (4.38) он отстоит от крайней точки $\overrightarrow{\alpha}^0 = (1, 0, \ldots, 0)$ не более, чем на $N\varepsilon$:

$$|\overrightarrow{\alpha}(t) - \overrightarrow{\alpha}^0| \le N\varepsilon \qquad \text{почти всюду}\,. \tag{4.44}$$

Обратимся теперь к ограничениям *равенства* задачи E. Так как для ρ^0 оператор P, задающий эти ограничения, удовлетворяет условию Люстерника, а его производная $P'(\rho)$ непрерывна относительно ρ, то и для всех мультитроек ρ, достаточно близких к ρ^0, условие Люстерника также выполнено (см. главу 2).

Таким образом, для мультитройки $\rho = (x, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{\alpha})$ выполнены все условия аппроксимационной теоремы 45. По этой теореме существует последовательность мультитроек $\rho^{(n)} = (x^{(n)}, \overrightarrow{u}^{(n)}, \overrightarrow{\alpha}^{(n)})$, удовлетворяющих всем ограничениям равенства задачи E, такая что

$$||x^{(n)} - x||_C \to 0, \qquad ||\overrightarrow{u}^{(n)} - \overrightarrow{u}||_\infty \to 0, \tag{4.45}$$

$$(\overrightarrow{\alpha}^{(n)} - \overrightarrow{\alpha}) \to 0 \qquad \text{слабо} - *\,, \tag{4.46}$$

причем для п.в. t вектор $\overrightarrow{\alpha}^{(n)}(t)$ находится в вершинах симплекса A, т.е. $\forall\, k\ \ \alpha_k^{(n)}(t)$ есть характеристическая функция некоторого измеримого множества $E_k^{(n)} \subset \Delta$.

Слабая-* сходимость в (4.46) означает сходимость на элементах из $L_1(\Delta)$, а значит, и на элементах из $L_\infty(\Delta) \subset L_1(\Delta)$, поэтому $\overrightarrow{\alpha}^{(n)}$ можно рассматривать как элементы пространства L_1, слабо (относительно L_∞) сходящиеся к $\overrightarrow{\alpha}$. Отсюда и из (4.44) по лемме 35 вытекает, что при больших n выполняется оценка

$$||\, \alpha^{(n)} - \alpha\, ||_1 \ \le\ CN\varepsilon\,. \tag{4.47}$$

Из (4.45) и непрерывности ограничений задачи по (x, u) вытекает, что при больших n мультитройка $\rho^{(n)}$ удовлетворяет неравенствам (4.40)–(4.43) с константой $\delta/2$.

Построим вышеуказанные функции (4.36). Тогда $u^{(n)}(t)$ совпадает с $u_k^{(n)}(t)$, а $v^{(n)}(t)$ совпадает с $v_k^0(t)$ на множестве $E_k^{(n)}$, $k = 1, \ldots, N$, поэтому полученная тройка

$\tau^{(n)} = (x^{(n)}, u^{(n)}, v^{(n)})$ удовлетворяет всем ограничениям равенства задачи D, а из упомянутых неравенств для $\rho^{(n)}$ с $\delta/2$ следует, что тройка $\tau^{(n)}$ удовлетворяет следующим строгим неравенствам задачи D:

$$\Phi_s(t, x^{(n)}(t)) \le -\delta/2 \qquad \forall\, s, \tag{4.48}$$

$$\varphi_i(t, x^{(n)}(t), u^{(n)}(t), v^{(n)}(t)) \le -\delta/2 \qquad \forall\, i, \tag{4.49}$$

$$F_\nu(p^{(n)}) \ \le\ -\delta/2 \qquad \forall\, \nu, \tag{4.50}$$

$$J(p^{(n)}) \ \le\ J(p^0) - \delta/2\,. \tag{4.51}$$

Последнее неравенство означает, что на тройке $\tau^{(n)}$ функционал принимает меньшее значение, чем на исследуемой тройке τ^0. Нетрудно видеть, что в силу (4.45) и (4.38) при больших n выполнена оценка

$$||x^{(n)} - x^0||_C \ \le\ ||x^{(n)} - x||_C + ||x - x^0||_C \ < 2\varepsilon. \tag{4.52}$$

Если бы нас интересовал сильный минимум в задаче D, то на этом доказательство было бы закончено. В случае же понтрягинского минимума мы должны доказать, что $u^{(n)}$ мало отличается по понтрягински от u^0. Покажем это.

Так как значения $u^{(n)}(t)$ принадлежат набору $\{\, u_1^{(n)}(t), \ldots, u_N^{(n)}(t)\,\}$, а эти функции ограничены, то $||u^{(n)}||_\infty \le \mathrm{const}$, т.е. первое требование понтрягинской близости выполнено. Осталось показать, что $||u^{(n)} - u^0||_1$ мала.

Сравним представления трех функций:

$$u^0(t) = \sum_k \alpha_k^0(t)\, u_k^0(t),$$

$$u(t) = \sum_k \alpha_k(t)\, u_k(t),$$

$$u^{(n)}(t) = \sum_k \alpha_k^{(n)}(t)\, u_k^{(n)}(t).$$

Второе отличается от первого тем, что согласно (4.38) функции α_k^0, u_k^0 заменились на равномерно близкие к ним с точностью до ε функции α_k, u_k, поэтому

$$||\, u - u^0\, ||_\infty \ \le C_1\, \varepsilon \tag{4.53}$$

(проверить!), где C_1 зависит лишь от норм $||u_k^0||_\infty$.

Третье разложение отличается от второго заменой u_k на равномерно сколь угодно близкие к ним функции $u_k^{(n)}$ (см. (4.45)) и заменой α_k на близкие к ним порядка ε в норме L_1 функции $\alpha_k^{(n)}$ (см. (4.47)). Отсюда при больших n легко следует оценка

$$||\, u^{(n)} - u\, ||_1 \le C_2\, \varepsilon, \tag{4.54}$$

где C_2 зависит лишь от длины набора N (также проверить!).

Суммируя (4.53) и (4.54), получаем

$$||\, u^{(n)} - u^0\, ||_1 \le (C_1 + C_2)\, \varepsilon. \tag{4.55}$$

Аналогично (и даже проще) получаем

$$|| v^{(n)} - v^0 ||_1 \le (C_1 + C_2)\, \varepsilon. \tag{4.56}$$

Таким образом, для каждого $\varepsilon > 0$ нашлась тройка $(x^{(n)}, u^{(n)}, v^{(n)})$, удовлетворяющая всем ограничениям задачи D, причем все неравенства выполнены строго и $J(x^{(n)}) < J(x^0)$, при этом $||u^{(n)}|| + ||v^{(n)}||_\infty \le \text{const}$ и выполнены оценки (4.52), (4.55), (4.56).

Учитывая, что $\varepsilon > 0$ произвольно, приходим к выводу, что понтрягинского минимума в точке (x^0, u^0, v^0) нет. Противоречие, которое доказывает теорему. □

Итак, если для мультитройки $\rho^0 = (x^0, \overrightarrow{u}^0, \overrightarrow{\alpha}^0)$ выполнено условие Люстерника, то для нее выполнена $s-$ необходимость в задаче E (следовательно, она является стационарной в этой задаче), и значит, как установлено в главе 3, для нее выполнен локальный принцип максимума.

Если же условие Люстерника для ρ^0 не выполнено, то, как уже отмечалось в главе 3, локальный принцип максимума все равно для нее выполнен, причем тривиальным образом. Поэтому из теоремы 46 вытекает следующий факт, которым мы и будем далее пользоваться.

Следствие из теоремы 46. *Если $\tau^0 = (x^0, u^0, v^0)$ — точка понтрягинского минимума в задаче D, то в любой связанной с ней присоединенной задаче E для мультитройки (4.37) независимо от выполнения условия Люстерника выполнен локальный принцип максимума.*

4.4 Конечнозначный принцип максимума

Выпишем теперь локальный принцип максимума для мультитройки $\rho^0 = (x^0, \overrightarrow{u}^0, \overrightarrow{\alpha}^0)$, пользуясь только что полученным следствием и результатами главы 3:

существует набор $(a, b, \psi, \mu_s, m_k, h_k, \omega_k, \theta)$ множителей Лагранжа для ограничений (4.28)–(4.30), (4.22)–(4.27) соответственно, где $a = (a_0, \dots, a_{d(F)})$,
$b = (b_0, \dots, b_{d(K)})$ — векторы размерности $d(F) + 1$ и $d(K)$ соответственно,
$\psi(t)$ есть $n-$ мерная функция ограниченной вариации на Δ,
$\mu_s(t)$, $s = 1, \dots, d(\Phi) -$ неубывающие функции на Δ,
$h_k(t)$ и $m_k(t)$, $k = 1, \dots, N$, — функции из $L_1^{d(\varphi)}(\Delta)$ и $L_1^{d(g)}(\Delta)$ соответственно, т.е.

$$h_k = (h_k^1, \dots, h_k^{d(\varphi)}), \qquad m_k = (m_k^1, \dots, m_k^{d(g)}),$$

(в данном параграфе координаты этих векторов мы пишем вверху, надеясь, что это не вызовет недоразумений),
$\omega_k(t)$, $k = 1, \dots, N$, и $\theta(t)$ — скалярные функции из $L_1(\Delta)$,

из которых $a \ge 0$, $h_k(t) \ge 0$, $\omega_k(t) \ge 0$;

этот набор удовлетворяет условию нетривиальности

$$|a| + |b| + \sum_s ||d\mu_s|| + \sum_k ||h_k||_1 + \sum_k ||\omega_k||_1 > 0, \tag{4.57}$$

и условиям дополняющей нежесткости

$$a_\nu\, F_\nu(p^0) = 0, \qquad \nu = 1, \dots, d(F), \tag{4.58}$$

$$d\mu_s\,\Phi_s(t,x^0(t)) = 0, \qquad s = 1,\dots,d(\Phi), \tag{4.59}$$

$$h_k^i(t)\,\varphi_i(t,x^0(t),u_k^0(t),v_k^0(t)) = 0, \qquad \begin{array}{l} k = 1,\dots,N, \\ i = 1,\dots,d(\varphi), \end{array} \tag{4.60}$$

$$\omega_k(t)\,\alpha_k^0(t) = 0, \qquad k = 1,\dots,N; \tag{4.61}$$

для него строятся функции:

$$l(p) = \sum_{\nu=0}^{d(F)} a_\nu\, F_\nu(p) + (b, K(p)) \qquad - \text{ концевая функция Лагранжа,}$$

$$\overline{H}(t,x,\overrightarrow{u},\overrightarrow{\alpha}) = \sum \alpha_k(t)(\psi, f(t,x,u_k,v_k^0)) - \sum_s \frac{d\mu_s}{dt}\Phi_s(t,x) -$$
$$- \sum_k m_k(t)\, g(t,x,u_k,v_k^0) - \sum_k h_k(t)\,\varphi(t,x,u_k,v_k^0) +$$
$$+ \sum_k \omega_k(t)\,\alpha_k(t) \;-\; \theta(t)\Big(\sum_k \alpha_k(t) - 1\Big)$$

— расширенная функция Понтрягина,
и при этом на траектории ρ^0 должны выполняться следующие условия:

сопряженное уравнение

$$-\dot\psi = \overline{H}_x = \sum_k \alpha_k^0(t)\,\psi(t)\,f_x(t,x^0,u_k^0,v_k^0) - \sum_s \frac{d\mu_s}{dt}\,\Phi_{sx}(t,x^0) - \tag{4.62}$$
$$- \sum_k m_k(t)\,g_x(t,x^0,u_k^0,v_k^0) - \sum_k h_k(t)\,\varphi_x(t,x^0,u_k^0,v_k^0),$$

условия трансверсальности

$$\psi(t_0) = l'_{x_0}(p^0), \qquad \psi(t_1) = -l'_{x_1}(p^0), \tag{4.63}$$

и условия стационарности по u_k и α_k :

$$\overline{H}_{u_k}(\rho^0(t)) = 0, \qquad \overline{H}_{\alpha_k}(\rho^0(t)) = 0, \qquad k = 1,\dots,N. \tag{4.64}$$

Проанализируем эти условия с учетом того, что для нашей траектории $\alpha^0 = (1,0,\dots,0)$, $u_1^0 = u^0$, $v_1^0 = v^0$.

1) Установим сначала, что $\forall\, k \ge 2$ почти всюду $m_k(t) = 0$ и $h_k(t) = 0$.

Зафиксируем любое $k \ge 2$. Тогда $\alpha_k^0(t) = 0$, и первое равенство в (4.64) означает:

$$\overline{H}_{u_k} = -(h_k\varphi_u + m_k g_u) \;=\; \left(\sum_i h_k^i\,\varphi_{iu} + \sum_j m_k^j\, g_{ju}\right)(t,\tau_k^0(t)) = 0, \tag{4.65}$$

где для краткости введено обозначение $\tau_k^0(t) = (x^0(t),u_k^0(t),v_k^0(t))$.
(Напомним, что h_k и m_k есть векторы
$$h_k = (h_k^1,\dots,h_k^{d(\varphi)}), \qquad m_k = (m_k^1,\dots,m_k^{d(g)}).\ )$$

Равенства (4.60) означают, что каждая функция $h_k^i(t)$ сосредоточена на своем множестве $M_0(\varphi_i,\tau_k^0) = \{\, t \mid \varphi_i(t,\tau_k^0(t)) = 0\,\}$, т.е. на множестве выхода на границу $i-$ го смешанного неравенства для четверки $(t,\tau_k^0(t))$.

Но из предположения D3 и леммы 28 вытекает, что векторы

$$\varphi_{iu}(t,\tau_k^0(t)), \qquad g_{ju}(t,\tau_k^0(t))$$

равномерно позитивно-линейно независимы на Δ относительно множеств $M_0(\varphi_i,\tau_k^0)$. Действительно, в качестве компакта D возьмем компакт Ω_k (содержащий почти всюду график тройки $\tau_k^0(t)$), пересеченный с ограничением $g(t,x,u,v)=0,$ т.е. здесь

$$\sigma = (t,x,u,v), \qquad \widehat{\sigma}(t) = (t,\tau_k^0(t)),$$

$$D = \{\, (t,x,u,v) \in \Omega_k \mid \; g(t,x,u,v) = 0\,\},$$

$$\Gamma_i = \{\, (t,x,u,v) \in D \mid \; \varphi_i(t,x,u,v) = 0\,\}.$$

Поэтому условие леммы 28 выполнено. А тогда из (4.65) по определению следует, что все $h_k^i(t) = m_k^j(t) = 0$ на Δ. Это также следует и из оценки (3.51).

Итак, из множителей h_k, m_k ненулевыми могут быть лишь h_1, m_1, поэтому индекс 1 у них в дальнейшем опускаем. Согласно (4.60), вектор-функция $h_1 = h = (h^1,\dots,h^{d(\varphi)})$ удовлетворяет условию дополняющей нежесткости:

$$h^i(t)\,\varphi_i(t,x^0(t),u^0(t),v^0(t)) = 0\,. \tag{4.66}$$

Первое уравнение в (4.64) для $k=1$ тогда выглядит так:

$$\overline{H}_{u_1} = \;(\psi f_u - h\varphi_u - mg_u)(t,x^0(t),u^0(t),v^0(t)) = 0, \tag{4.67}$$

а сопряженное уравнение (4.62) приобретает вид

$$-\dot{\psi} = \;(\psi f_x - \dot{\mu}\,\Phi_x - h\,\varphi_x - m\,g_x)(t,x^0(t),u^0(t),v^0(t)). \tag{4.68}$$

2) Рассмотрим второе равенство в (4.64):

$$\overline{H}_{\alpha_k} = \;\psi(t)\,f(t,\tau_k^0(t)) \;+\omega_k(t) - \theta(t) = 0, \qquad k = 1,\dots,N. \tag{4.69}$$

Так как в силу (4.61) $\omega_1(t) \equiv 0$, а остальные $\omega_k(t) \ge 0$, $k \ge 2$, то отсюда следует (учитывая, что $\theta(t)$ одно и то же для всех равенств (4.69)!), что для функции Понтрягина $H(t,x,u,v) = \;\psi\,f(t,x,u,v)$ почти всюду на Δ выполнены неравенства

$$H(t,x^0(t),u_k^0(t),v_k^0(t)) \le H(t,x^0(t),u_1^0(t),v_1^0(t)), \qquad k = 2,\dots,N, \tag{4.70}$$

т.е. выполнено условие максимума функции H на данном конечном наборе $(u_k^0(t),v_k^0(t))$. Назовем его конечнозначным условием максимума.

3) Наконец заметим, что в условие нетривиальности (4.57) можно не включать множитель ω_1 , т.е. можно рассматривать условие

$$|a| + |b| + \sum_s ||d\mu_s|| + ||h_1||_1 > 0. \tag{4.71}$$

Действительно, покажем, что если включенные сюда величины равны нулю, то и оставшиеся $\psi,\ m_1,\ \omega_1,\ \theta$ также равны нулю. В самом деле, тогда (4.68) и (4.67) превращаются в равенства

$$-\dot{\psi} = \psi f_x - m g_x, \qquad \psi f_u - m g_u = 0.$$

Как и в лемме 32, умножив последнее равенство на правую обратную матрицу к $g_u(t,\tau^0(t))$ (которая существует в силу предположения D3), получим линейное выражение m через ψ, и тогда ψ удовлетворяет линейному однородному уравнению, а так как у нас $l(p)\equiv 0$, то в силу (4.63) $\psi(t_0)=0$, откуда $\psi(t)\equiv 0$, а вместе с ним и $m(t)\equiv 0$. Из (4.69) при $k\ge 2$ следует, что $\theta(t)\equiv 0$, а тогда при $k=1$ получаем $\omega_1(t)\equiv 0$.

Таким образом, правомерность условия нетривиальности (4.71) установлена. Нам будет удобно вместо него рассматривать нормировку

$$|a|+|b|+\sum_s ||d\mu_s||+||h||_1 \ = 1,$$

т.е.

$$|a|+|b|+\sum_s\int_\Delta d\mu_s(t)+\sum_i\int_\Delta h^i\,dt \ = 1. \tag{4.72}$$

4.5 Глобальный принцип максимума

Итак, мы показали, что для произвольного набора управлений

$$(u_2^0,v_2^0),\ \ldots,\ (u_N^0,v_N^0), \tag{4.73}$$

удовлетворяющих ограничениям (4.17), существует набор $\lambda=(a,\ b,\ \psi,\ \mu,\ h=h_1,\ m=m_1)$, где

$$a\in\mathbb{R}_+^{d(F)+1},\quad b\in\mathbb{R}^{d(K)},\quad \psi(t)\in BV^n(\Delta)),\quad \mu=(\mu_1,\ldots,\mu_{d(\Phi)}),$$

каждая $\mu_s(t)-$ неубывающая функция на Δ, т.е. $d\mu_s(t)-$ радонова мера, задающая линейный функционал над пространством $C(\Delta)$,

$$h(t)\in L_\infty^{d(\varphi)}(\Delta)=\Big(L_1^{d(g)}(\Delta)\Big)^*,\ \ h(t)\ge 0,\qquad m(t)\in L_\infty^{d(g)}(\Delta)=\Big(L_1^{d(g)}(\Delta)\Big)^*,$$

для которого выполнен “конечнозначный” ПМ (4.63), (4.58), (4.59), (4.66), (4.67), (4.68), (4.70) и условие нормировки (4.72).

Перейдем теперь от полученного конечнозначного ПМ к глобальному ПМ.

Набор управлений (4.73) обозначим для краткости буквой z, а множество всех соответствующих ему наборов λ с указанными свойствами обозначим

$$\Lambda(z)=\ \Lambda((u_2^0,v_2^0),\ldots,(u_N^0,v_N^0)),$$

и далее индекс 0 вверху писать не будем. Это множество лежит в пространстве

$$Y^*=\ \mathbb{R}^{d(F)+1}\times\mathbb{R}^{d(K)}\times(C^n(\Delta))^*\times(C^{d(\Phi)}(\Delta))^*\times(L_1^{d(\varphi)}(\Delta))^*\times(L_1^{d(g)}(\Delta))^*,$$

сопряженном к соответствующему банахову пространству Y.

Ключевой факт для дальнейшего состоит в следующем.

Лемма 38. *Множество* $\Lambda(z)$ *есть компакт в слабой-* топологии пространства* Y^*.

Доказательство. Как мы уже видели, компоненты ψ и m линейно выражаются через остальные компоненты набора λ из уравнений (4.67) и (4.68), поэтому в силу нормировки (4.72) множество $\Lambda(z)$ ограничено. Поскольку все условия, задающие $\Lambda(z)$, кроме нормировки, линейны по всем компонентам λ, а относительно бесконечномерных компонент (ψ, $d\mu_s$, h^i, m^j) все условия, включая нормировку (4.72), задаются линейными функционалами из исходных пространств (соответственно из C, C, L_1 L_1), т.е. слабо-* непрерывными функционалами, то множество $\Lambda(z)$ слабо-* замкнуто.

Проверим, например, слабую-* замкнутость множества всех λ, удовлетворяющих сопряженному уравнению (4.68), которое запишем в форме мер:

$$d\psi(t) \;=\; (-\psi\, f_x + h\,\varphi_x + m\, g_x)\, dt \;+\; \Phi_x\, d\mu(t)\,. \tag{4.74}$$

Отметим сразу, что функции f_x, φ_x, g_x, вычисленные вдоль траектории $x^0(t), u^0(t), v^0(t)$, измеримы и ограничены, а Φ_x непрерывна.

Пусть наборы $\lambda^k \in Y^*$, $k = 1, 2, \ldots$, удовлетворяют уравнению (4.74) и слабо-* сходятся к некоторому набору $\lambda^0 \in Y^*$. Покажем, что и предельный набор λ^0 также удовлетворяет этому уравнению. Поскольку (4.74) представляет собой равенство линейных функционалов над пространством $C^n(\Delta)$, то достаточно проверять его на любой функции из $C^n(\Delta)$. Итак, возьмем произвольную непрерывную функцию $\gamma(t)$. Тогда по условию для любого k

$$\int_\Delta \gamma\, d\psi^k(t) \;=\; \int_\Delta \gamma\,(-\psi^k\, f_x + h^k\, \varphi_x + m^k\, g_x)\, dt \;+\; \int_\Delta \gamma\, \Phi_x\, d\mu^k(t)\,. \tag{4.75}$$

Так как $d\psi^k \xrightarrow{\text{сл-*}} d\psi^0$, то левая часть сходится к нужному пределу:

$$\int_\Delta \gamma\, d\psi^k(t) \;\to \int_\Delta \gamma\, d\psi^0(t). \tag{4.76}$$

Займемся правой частью. Слабая-* сходимость функций $\psi^k \to \psi^0 \in BV^n(\Delta)$ как линейных функционалов над $C^n(\Delta)$ эквивалентна тому, что их вариации в совокупности ограничены (это у нас выполнено в силу нормировки; а тогда и сами функции равномерно ограничены), и для любой точки непрерывности функции ψ^0 имеется сходимость $\psi^k(t) \to \psi^0(t)$. Поскольку ψ^0 может быть разрывна не более чем на счетном множестве, то $\psi^k(t) \to \psi^0(t)$ почти всюду на Δ. А тогда по теореме Лебега

$$\int_\Delta \gamma\, \psi^k\, f_x\, dt \;\to\; \int_\Delta \gamma\, \psi^0\, f_x\, dt\,.$$

Сходимость

$$\int_\Delta \gamma\,(h^k\varphi_x + m^k g_x)\, dt \;\to\; \int_\Delta \gamma\,(h^0\varphi_x + m^0 g_x)\, dt$$

следует из того, что $h^k \to h^0$, $m^k \to m^0$ слабо-* в пространстве L_∞ относительно L_1 .

Наконец, меры $d\mu^k \xrightarrow{\text{сл-*}} d\mu^0$ в пространстве $BV = C^*$, т.е. по определению на любой непрерывной функции их интегралы по Δ сходятся, а тогда

$$\int_\Delta \gamma\, \Phi_x\, d\mu^k \;\to\; \int_\Delta \gamma\, \Phi_x\, d\mu^0\,.$$

Итак, правая часть (4.75) стремится к

$$\int_\Delta \gamma\,(-\psi^0\, f_x + h^0\, \varphi_x + m^0\, g_x)\, dt \;+\; \int_\Delta \gamma\, \Phi_x\, d\mu^0(t).$$

А тогда с учетом (4.76) получаем

$$\int_\Delta \gamma\, d\psi^0(t) \;=\; \int_\Delta \gamma\,(-\psi^0\, f_x + h^0\, \varphi_x + m^0\, g_x)\, dt \;+\; \int_\Delta \gamma\, \Phi_x\, d\mu^0(t)\,.$$

В силу произвольности $\gamma \in C^n(\Delta)$ отсюда следует требуемое равенство

$$d\psi^0(t) \;=\; (-\psi^0\, f_x + h^0\, \varphi_x + m^0\, g_x)\, dt \;+\; \Phi_x\, d\mu^0(t)\,.$$

Слабая-* замкнутость остальных условий, задающих множество $\Lambda(z)$, устанавливается еще проще. (Проверьте!) Таким образом, множество $\Lambda(z)$ слабо-* замкнуто и ограничено. А тогда по теореме Алаоглу оно есть слабый-* компакт. □

Итак, для произвольного набора $z = ((u_2^0, v_2^0), \ldots, (u_N^0, v_N^0))$, удовлетворяющего ограничениям (4.17), в пространстве Y^* со слабой-* топологией имеется непустой компакт $\Lambda(z)$, каждая точка которого обеспечивает выполнение условий (4.63), (4.58), (4.59), (4.66), (4.67), (4.68), (4.72), не зависящих от набора z, а также условия максимума (4.70) для набора z.

Ясно, что если набор z'' шире набора z' (в смысле обычного включения: $z'' \supset z'$), то соответствующее множество будет уже: $\Lambda(z'') \subset \Lambda(z')$, и поэтому для любых z', z'' пересечение $\Lambda(z') \cap \Lambda(z'')$ непусто, ибо оно содержит непустое множество $\Lambda(z' \cup z'')$. Точно так же и для любого конечного числа наборов $z_1, \ldots, z_k$ пересечение $\bigcap \Lambda(z_i)$ непусто. Таким образом, совокупность множеств $\Lambda(z)$ по всем конечным наборам z есть центрированная система компактов, и следовательно, она имеет непустое пересечение.

Возьмем любое

$$\lambda = (a, b, \psi, \mu, h, m) \;\in\; \bigcap_z \Lambda(z)\,.$$

Для него по-прежнему выполнены все условия (4.63), (4.58), (4.59), (4.66), (4.67), (4.68), (4.72), не зависящие от набора z.

Условие максимума (4.70) выполнено теперь для любого набора z, т.е. для любой пары управлений $u(t)$, $v(t)$, удовлетворяющих почти всюду на Δ ограничениям

$$\varphi(t, x^0(t), u(t), v(t)) \le 0,$$

$$g(t, x^0(t), u(t), v(t)) = 0,$$

$$v(t) \in V(t),$$

и для которых существует компакт $\widetilde{\Omega} \subset \mathcal{Q}$, такой что

$$(t, x^0(t), u(t), v(t)) \in \widetilde{\Omega} \qquad \text{почти всюду на} \quad \Delta,$$

почти всюду на Δ выполнено неравенство

$$H(t, x^0(t), u(t), v(t)) \le H(t, x^0(t), u^0(t), v^0(t)). \tag{4.77}$$

Таким образом, ПМ (4.12)–(4.19) доказан.

Осталось установить справедливость условия максимума в обычной форме (4.20). Пусть многозначное отображение $V(t)$ измеримо. Тогда, как известно, многозначное отображение $R:\ \Delta \to \mathbb{R}^{r_u+r_v}$,

$$R(t) = \{\,(u,v) \mid \varphi(t,x^0(t),u,v) \le 0, \quad g(t,x^0(t),u,v) = 0,$$
$$v(t) \in V(t), \quad (t,x^0(t),u,v) \in \mathcal{Q}\,\}.$$

также измеримо (как пересечение измеримых многозначных отображений).
Из теоремы об измеримом выборе (см. напр. [14, 15]) следует, что для почти всех $t \in \Delta$ множество $R(t)$ содержится в замыкании множества значений $(u(t),v(t)) \in \mathbb{R}^{r_u+r_v}$, образованного всевозможными измеримыми сечениями отображения $R(t)$. А тогда из доказанного условия максимума (4.77) по всем измеримым сечениям отображения $R(t)$, проходящим "равномерно внутри" множества $\mathcal{Q}$, вытекает, что для почти всех t

$$\max_{(u,v)\in R(t)} H(t,x^0(t),u,v) \;\le\; H(t,x^0(t),u^0(t),v^0(t))$$

(покажите!), а в силу того, что сама исследуемая пара $(u^0(t),v^0(t)) \in R(t)$ п.в. на Δ, последнее неравенство почти всюду выполнено со знаком равенства.

Таким образом, теорема 44 — ПМ для задачи А — полностью доказана.

4.6 Задача с нефиксированным временем

Установим ПМ для задачи на нефиксированным отрезке времени $[t_0,t_1]$ при гладкой зависимости от t .

Пусть задача по-прежнему имеет вид (4.1)—(4.9), но теперь вектор концевых значений p включает также и моменты времени $t_0,\ t_1$:

$$p \;=\; (x_0,\, x_1,\; t_0,\, t_1)\,;$$

при этом $p \in \mathcal{P}$, где $\mathcal{P}$ – открытое множество в $\mathbb{R}^{2n+2}$. Набор (t,x,u,v) по-прежнему принадлежит открытому множеству $\mathcal{Q} \subset \mathbb{R}^{1+n+r}$. Назовем эту задачу задачей D_t .

Считая, кроме выполнения предположений D1–D5, что все функции задачи D_t гладко зависят от t, а нефункциональное ограничение (4.5) не зависит от t (т.е. множество $V(t) \equiv V$ постоянно), сведем ее к рассмотренной выше "канонической" задаче D на фиксированным отрезке времени.

Введем новое время $\tau \in [0,1]$ и еще одно управление $w(\tau)$, принимающее значения в области $w > 0$ (это его "жизненное пространство"), а "старое" время t будем рассматривать как еще одну фазовую переменную, подчиненную уравнению

$$\frac{dt}{d\tau} \;=\; w(\tau)\,. \tag{4.78}$$

Тогда для фазовой переменной x получаем уравнение

$$\frac{dx}{d\tau} \;=\; w(\tau)\, f(t,x,u,v)\,. \tag{4.79}$$

Задачу (4.1)—(4.9) с уравнениями (4.78), (4.79) и условием $w > 0$ назовем задачей D_τ . В ней имеются три группы управлений: $u,\, v,\, w,$ из которых $u,\, w$ – "гладкие", а управление v мы рассматриваем как "негладкое" (ибо функции задачи лишь непрерывны по v).

При сделанной замене времени любая допустимая траектория задачи D_t

$$x(t),\ u(t),\ v(t),\ \ t \in [t_0, t_1] \tag{4.80}$$

порождает целое семейство допустимых траекторий задачи D_τ. А именно, взяв любую функцию $w(\tau) \in L_\infty[0,1]$, удовлетворяющую условию $w(\tau) \geq \text{const} > 0$ (это необходимо, ибо значения $w(\tau)$ должны принадлежать некоторому компакту, лежащему в области $w > 0$), и условию

$$\int_0^1 w(\tau)\, d\tau \ =\ t_1 - t_0\,,$$

определим функцию $t(\tau)$ из уравнения (4.78) с начальным условием $t(0) = t_0$, и положим $\mathcal{X}(\tau) = x(t(\tau))$, $\mathcal{U}(\tau) = u(t(\tau))$, $\mathcal{V}(\tau) = v(t(\tau))$. Тогда полученная траектория

$$t(\tau),\ \ \mathcal{X}(\tau),\ \ \mathcal{U}(\tau),\ \ \mathcal{V}(\tau),\ \ w(\tau) \tag{4.81}$$

будет допустима в задаче D_τ. При этом

$$t(0) = t_0, \qquad t(1) = t_1, \qquad \mathcal{X}(0) = x(t_0), \qquad \mathcal{X}(1) = x(t_1),$$

т.е. концы новой траектории совпадают с концами старой, набор

$$p = \ (x(t_0),\, x(t_1),\, t_0,\, t_1)$$

переходит в набор

$$\pi = \ (\mathcal{X}(0),\, \mathcal{X}(1),\, t(0),\, t(1)),$$

и поэтому значения всего концевого блока не меняются.

Среди всех траекторий задачи D_τ, соответствующих данной траектории (4.80), выделим для удобства одну — а именно ту, у которой

$$w(\tau)\ \equiv\ \text{const}\ = t_1 - t_0\,,$$

$$\text{т.е.} \qquad t = \ t_0 + (t_1 - t_0)\,\tau\,.$$

Тогда любой допустимой траектории задачи D_t однозначно соответствует допустимая траектория задачи D_τ с теми же значениями концевого блока (и в частности, с тем же значением функционала).

Обратный же переход — от траекторий задачи D_τ к траекториям задачи D_t происходит однозначным образом при любом управлении $w(\tau) \geq \text{const} > 0$. Для этого надо заметить, что в этом случае функция $t(\tau)$ строго возрастает, поэтому она имеет обратную $\tau = \tau(t)$, которая удовлетворяет уравнению

$$\frac{d\tau}{dt}\ =\ \frac{1}{w(\tau)}\,,$$

и тогда функция $x(t) = \mathcal{X}(\tau(t))$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{d\,x}{dt}\ =\ \frac{d\mathcal{X}}{d\tau}\,\frac{d\tau}{dt}\ =\ w\ f(t,x,u,v)\,\frac{1}{w}\ =\ f(t,x,u,v).$$

Из наличия такой связи между задачами D_t и D_τ вытекает следующее очевидное свойство.

Лемма 39. *Допустимая траектория (4.80) оптимальна (т.е. доставляет глобальный минимум) в задаче* D_t *тогда и только тогда, когда соответствующая ей траектория (4.81) оптимальна в задаче* D_τ .

На самом деле справедливо более сильное утверждение.

Лемма 40. *Допустимая траектория (4.80) доставляет понтрягинский минимум в задаче* D_t *тогда и только тогда, когда соответствующая ей траектория (4.81) доставляет понтрягинский минимум в задаче* D_τ .

Доказательство этой последней леммы пока отложим, а сейчас воспользуемся описанным переходом к задаче D_τ . Итак, пусть траектория

$$x^0(t),\ u^0(t),\ v^0(t), \quad t \in [t_0^0,\, t_1^0] \tag{4.82}$$

доставляет понтрягинский минимум в задаче D_t . Тогда соответствующая траектория

$$\begin{gathered} t^0(\tau), \quad \mathcal{X}^0(\tau) = x^0(t^0(\tau)), \\ \mathcal{U}^0(\tau) = u^0(t^0(\tau)), \quad \mathcal{V}^0(\tau) = v^0(t^0(\tau)), \quad w^0(\tau) = t_1 - t_0 \end{gathered} \tag{4.83}$$

доставляет понтрягинский минимум в задаче D_τ . Эта задача является задачей типа D, рассмотренной в $4.1, поэтому для нее справедлив Принцип Максимума. Выпишем его для траектории (4.83), относя управление w к первой группе (т.е. к группе "гладких" управлений).

Согласно теореме 44, найдется набор чисел $\alpha = (\alpha_0, \dots, \alpha_{d(F)}) \geq 0$, вектор $\beta \in \mathbb{R}^{d(K)}$, $n-$ мерная функция ограниченной вариации $\Psi_x(\tau)$, скалярная функция ограниченной вариации $\Psi_t(\tau)$ и монотонно неубывающие функции $\sigma_s(\tau)$, $s = 1, \dots, d(\Phi)$ (порождающие меры Радона $d\sigma_s(\tau)$), непрерывные в концах отрезка, функции $\Lambda_i(\tau) \geq 0$ из $L_\infty[0,1]$, $i = 1, \dots, d(\varphi)$, и вектор-функция $M(\tau) \in L_\infty[0,1]$ размерности $d(g)$, для которых выполнены следующие условия:

а) условие нетривиальности

$$|\alpha| + |\beta| + \sum_s |\sigma_s(1) - \sigma_s(0)| + \sum_i ||\Lambda_i||_1 > 0, \tag{4.84}$$

б) условия дополняющей нежесткости

$$\begin{gathered} \alpha_\nu\, F_\nu(p^0) = 0, \qquad \nu = 1, \dots, d(F), \\ d\sigma_s(\tau)\, \Phi_s(t^0(\tau), \mathcal{X}^0(\tau)) \equiv 0, \qquad \forall\, s, \\ \Lambda_i(\tau)\, \varphi_i(t^0(\tau), \mathcal{X}^0(\tau), \mathcal{U}^0(\tau), \mathcal{V}^0(\tau)) = 0 \qquad \text{почти всюду}\,, \quad \forall\, i, \end{gathered} \tag{4.85}$$

в) сопряженные уравнения

$$-\frac{d\Psi_x(\tau)}{d\tau} \;=\; \overline{\mathbf{H}}_x =\; w^0\, \Psi_x(\tau) f_x^0 - \dot{\sigma}(\tau)\, \Phi_x - \Lambda(\tau)\, \varphi_x - M(\tau)\, g_x, \tag{4.86}$$

$$-\frac{d\Psi_x(\tau)}{d\tau} \;=\; \overline{\mathbf{H}}_t = \; w^0\,\Psi_x(\tau) f_t^0 - \dot\sigma(\tau)\,\Phi_t - \Lambda(\tau)\,\varphi_t - M(\tau)\,g_t, \tag{4.87}$$

где $\overline{\mathbf{H}}(t,x,u,v,w) = \; \Psi_x(\tau),\, w\,f \;+\Psi_t(\tau)\,w - \;\dot\sigma\,\Phi - \;\Lambda\,\varphi - \;M\,g$
— расширенная функция Понтрягина задачи D_τ (здесь $\dot\sigma(\tau) = \frac{d\sigma(\tau)}{d\tau}$),

г) условия трансверсальности

$$\begin{aligned} \Psi_x(0) &= l_{x_0}(p^0), & \Psi_x(1) &= -l_{x_1}(p^0),\\ \Psi_t(0) &= l_{t_0}(p^0), & \Psi_t(1) &= -l_{t_1}(p^0), \end{aligned} \tag{4.88}$$

где $l(p) = \; \alpha_0 F_0(p) + \sum \alpha_\nu F_\nu(p) + \;\beta\,K(p)$ — концевая функция Лагранжа,

д) условия стационарности по $u,\,w$:

$$\overline{\mathbf{H}}_u = \; w^0\,\Psi_x(\tau)\,f_u - \Lambda(\tau)\,\varphi_u - M(\tau)\,g_u = 0, \tag{4.89}$$

$$\overline{\mathbf{H}}_w = \;\; \Psi_x(\tau)\,f \;+\; \Psi_t(\tau) = 0, \tag{4.90}$$

е') условие максимума: для почти всех $\tau \in [0,1]$

$$\begin{aligned} \max_{\substack{(\mathcal{U},\mathcal{V})\in\mathcal{R}(\tau),\\ w>0}} \; &\mathbf{H}(t^0(\tau),\mathcal{X}^0(t),\mathcal{U},\mathcal{V},w) \;=\\ &= \;\mathbf{H}(t(\tau),\mathcal{X}^0(\tau),\mathcal{U}^0(\tau),\mathcal{V}^0(\tau),w^0(\tau)), \end{aligned} \tag{4.91}$$

где $\mathbf{H}(t,\mathcal{X},\mathcal{U},\mathcal{V},w) = \; w\,(\Psi_x\,f(t,\mathcal{X},\mathcal{U},\mathcal{V}) + \Psi_t)$
— есть функция Понтрягина задачи D_τ ,

$$\begin{aligned} \mathcal{R}(t) = \{\; (\mathcal{U},\mathcal{V}) \in \mathbb{R}^{r_u+r_v} \;\;|\;\;\; &(t^0(\tau),\mathcal{X}^0(t),\,\mathcal{U},\mathcal{V}) \in \mathcal{Q}, \qquad \mathcal{V}\in V,\\ \varphi(t^0(\tau),\mathcal{X}^0(t),\,\mathcal{U},\mathcal{V}) \le 0, &\qquad g(t^0(\tau),\mathcal{X}^0(t),\,\mathcal{U},\mathcal{V}) = 0\,\} \end{aligned}$$

— множество управлений $\mathcal{U},\mathcal{V}$, допустимых к сравнению в момент τ .

(Мы здесь пишем условие максимума сразу в окончательной поточечной форме, так как нефункциональное ограничение на "негладкое" управление v постоянно, а остальные задают множество управлений, измеримо зависящее от τ .)

Посмотрим теперь, что означают эти условия для исходной траектории (4.82), учитывая, что

$$w^0(\tau) \equiv t_1 - t_0 > 0, \qquad \text{т.е.} \qquad dt^0(\tau) = (t_1-t_0)\,d\tau, \qquad \tau(t) = \frac{t-t_0}{t_1-t_0}\,.$$

Введем функции

$$h_i(t) = \Lambda_i(\tau(t))/w^0, \qquad m_j(t) = M_j(\tau(t))/w^0, \qquad \mu_s(t) = \sigma_s(\tau(t)),$$

$$\psi_x(t) = \Psi_x(\tau(t)), \qquad \psi_t(t) = \Psi_t(\tau(t)).$$

Тогда условие нетривиальности останется без изменения, условия дополняющей нежесткости станут такими:

$$\begin{gathered}\alpha_\nu\, F_\nu(p^0) = 0, \qquad \nu = 1,\ldots,d(F),\\ d\mu_s(t)\,\Phi_s(t,x^0(\tau)) \equiv 0, \qquad \forall\, s,\\ h_i(t)\,\varphi_i(t,x^0(t),u^0(t),v^0(t)) = 0 \qquad \text{почти всюду}\,, \quad \forall\, i,\end{gathered} \tag{4.92}$$

сопряженные уравнения перейдут в

$$\begin{aligned} -\frac{d\psi_x}{dt} &= -\frac{d\Psi_x}{d\tau}\,\frac{1}{w^0} = \quad \psi_x f_x - \dot\mu(t)\,\Phi_x - h(t)\,\varphi_x - m(t)\,g_x\,,\\ -\frac{d\psi_t}{dt} &= -\frac{d\Psi_t}{d\tau}\,\frac{1}{w^0} = \quad \psi_x f_t - \dot\mu(t)\,\Phi_t - h(t)\,\varphi_t - m(t)\,g_t\,,\end{aligned} \tag{4.93}$$

условия трансверсальности превратятся в

$$\begin{aligned} \psi_x(t_0) &= l_{x_0}(p^0), \qquad \psi_x(t_1) = -l_{x_1}(p^0),\\ \psi_t(t_0) &= l_{t_0}(p^0), \qquad \psi_t(t_1) = -l_{t_1}(p^0),\end{aligned} \tag{4.94}$$

условие стационарности по $\mathcal{U}$ даст $\overline{\mathbf{H}}_u = \, w^0\,\Psi_x(\tau) f_u - \Lambda\varphi_u - M g_u = 0,$ т.е.

$$\psi_x\, f_u - h\,\varphi_u - m\,g_u = 0, \tag{4.95}$$

условие стационарности по w даст

$$\overline{\mathbf{H}}_w = \, \psi_x f + \psi_t = 0, \tag{4.96}$$

что эквивалентно условию максимума $\mathbf{H}$ по w, а условие максимума $\mathbf{H}$ по $\mathcal{U}, \mathcal{V}$ означает, что для всех $t \in [t_0,t_1]$ функция Понтрягина $H = \psi_x\, f(t,x,u,v)$ задачи D_t удовлетворяет условию максимума (4.20).

Таким образом, приходим к тому, что для исходной траектории (4.82) задачи D_t выполнены все утверждения теоремы 44 с дополнительным сопряженным уравнением (4.93), равенством (4.96) и дополнительным условием трансверсальности

$$\psi_t(t_0) = l'_{t_0}(p^0), \qquad \psi_t(t_1) = -l'_{t_1}(p^0)\,.$$

Равенство (4.96) и второе уравнение в (4.93) в совокупности эквивалентны (если исключить из них ψ_t) одному уравнению $\dfrac{dH}{dt} = \dfrac{\partial\overline{H}}{\partial t}$, т.е. как раз "недостающему" уравнению (4.21).

Итак, для задачи D с гладкой зависимостью от времени Принцип Максимума получен в полном объеме.

Сформулируем полученный окончательный результат.

Теорема 47. *Пусть рассматривается задача D вида (4.1)—(4.9), в которой отрезок $[t_0,\ t_1]$ не фиксирован, $p=\ (x_0,x_1,\ t_0,\ t_1)$, а множество $V(t)\equiv V$ постоянно. Пусть выполнены предположений D1–D5, и функции $f_t,\ \varphi_t,\ g_t,\ \Phi_t$ непрерывны по совокупности своих переменных на открытом множестве $\mathcal{Q}$.*

Пусть траектория $x^0(t),u^0(t),v^0(t)$, определенная на отрезке $\Delta^0=[t_0^0,\ t_1^0]$, доставляет понтрягинский минимум в этой задаче. Тогда найдется набор чисел $\alpha=(\alpha_0,\dots,\alpha_{d(F)})\ge 0$, вектор $\beta\in I\!R^{d(K)}$, $n-$ мерная функция $\psi_x(t)$ и скалярная функция $\psi_t(t)$ ограниченной вариации, непрерывные в концах отрезка Δ^0, монотонно неубывающие функции $\mu_s(t)$, $s=1,\dots,d(\Phi)$ (порождающие меры Радона $d\mu_s(t)$), также непрерывные в концах отрезка Δ^0, функции $h_i(t)\ge 0$ из $L_\infty(\Delta)$, $i=1,\dots,d(\varphi)$ и вектор-функция $m(t)\in L_\infty(\Delta)$ размерности $d(g)$, для которых выполнены: условие нетривиальности (4.12), условия дополняющей нежесткости (4.13), сопряженные уравнения

$$\begin{aligned}
-\frac{d\psi_x}{dt} &= \overline{H}_x = \quad \psi_x f_x-\dot\mu(t)\,\Phi_x-h(t)\,\varphi_x-m(t)\,g_x\,,\\
-\frac{d\psi_t}{dt} &= \overline{H}_t = \quad \psi_x f_t-\dot\mu(t)\,\Phi_t-h(t)\,\varphi_t-m(t)\,g_t\,,
\end{aligned}\tag{4.97}$$

где $\overline{H}(t,x,u,v)=(\psi,f)-(h,\varphi)-(m,g)-(\dot\mu,\Phi)$ — расширенная функция Понтрягина; условия трансверсальности (4.94), где $l(p)=\alpha_0F_0(p)+\sum\alpha_\nu F_\nu(p)+(\beta,K(p))$ — концевая функция Лагранжа, условие (4.94) стационарности по u : $\overline{H}_u=0$, условие (4.20) максимума функции Понтрягина $H(t,x,u,v)=(\psi_x,\ f(t,x,u,v))$, и равенство $H(t,x^0(t),u^0(t),v^0(t))+\psi_t(t)=0$, служащее для определения "дополнительной" сопряженной переменной ψ_t .

Замечание 4.7. Если записывать функцию Понтрягина не в виде $H=(\psi_x,\ f(t,x,u,v))$, а в виде $H=(\psi_x,\ f(t,x,u,v))+\psi_t$ (что иногда удобно), то последние два условия теоремы принимают следующий вид:

для всех $t\in\Delta^0$

$$\max_{(u,v)\in C(t)\cap Q(t)} H(t,x^0(t),u,v)\ =\ 0,\tag{4.98}$$

и $H(t,x^0(t),u^0(t),v^0(t))=0$ почти всюду на Δ^0 .

Остальные условия не зависят от выбора записи функции Понтрягина.

Доказательство леммы 40. Достаточно доказать импликацию в одну сторону: если траектория (4.82) доставляет понтрягинский минимум в задаче D_t то соответствующая ей траектория (4.83) доставляет понтрягинский минимум в задаче D_τ. Для этого достаточно показать, что если последовательность траекторий

$$t^k(\tau),\ \ \mathcal{X}^k(\tau),\ \ \mathcal{U}^k(\tau),\ \ \mathcal{V}^k(\tau),\ \ w^k(\tau)$$

сходится по-понтрягински к траектории

$$t^0(\tau),\ \ \mathcal{X}^0(\tau),\ \ \mathcal{U}^0(\tau),\ \ \mathcal{V}^0(\tau),\ \ w^0(\tau),$$

то и то соответствующие траектории

$$x^k(t)=\mathcal{X}^k(\tau^k(t)),\quad u^k(t)=\mathcal{U}^k(\tau^k(t)),\quad v^k(t)=\mathcal{V}^k(\tau^k(t))$$

будут сходится по-понтрягински к траектории

$$x^0(t) = \mathcal{X}^0(\tau^0(t)), \quad u^0(t) = \mathcal{U}^0(\tau^0(t)), \quad v^0(t) = \mathcal{V}^0(\tau^0(t)).$$

(Отсюда вытекает, что нарушение понтрягинского минимума в задаче D_τ будет приводить к нарушению понтрягинского минимума в задаче D_t .)

Равномерная сходимость $x^k(t) \Longrightarrow x^0(t)$ очевидно вытекает из равномерной сходимости $\mathcal{X}^k(\tau) \Longrightarrow \mathcal{X}^0(\tau)$, а сходимость $t_0^k = t^k(0)$ и $t_1^k = t^k(1)$ соответственно к $t_0^0 = t^0(0)$ и $t_1^0 = t^0(1)$ следует из равномерной сходимости $t^k(\tau) \Longrightarrow t^0(\tau)$.

Проверим теперь, что из понтрягинской сходимости $\mathcal{U}^k(\tau) \to \mathcal{U}^0(\tau)$ вытекает понтрягинская сходимость $u^k(t) \to u^0(t)$. (И то же самое будет справедливо для управления v .) Равномерная ограниченность $|u^k(t)| \le \text{const}$ эквивалентна равномерной ограниченности $|\mathcal{U}^k(\tau)| \le \text{const}$, поэтому надо лишь установить сходимость в норме L_1 :

$$\int_{\hat{\Delta}^k} |u^k(t) - u^0(t)|\, dt \to 0\,,$$

где $\hat{\Delta}^k = [\hat{t}_0^k, \hat{t}_1^k], \qquad \hat{t}_0^k = \max(t_0^k, t_0^0), \qquad \hat{t}_1^k = \min(t_1^k, t_1^0)$.

Этот факт удобно выделить в отдельную лемму.

Лемма 41. *Пусть* $\mathcal{U}^k(\tau) \Longrightarrow \mathcal{U}^0(\tau)$ *в пространстве* $L_1[0,1]$,

$$\frac{dt^k}{d\tau} = w^k(\tau), \qquad t^k(0) = t_0^k\,,$$

$$\frac{dt^0}{d\tau} = w^0(\tau), \qquad t^0(0) = t_0^0\,,$$

$$t_0^k \to t_0^0, \qquad ||w^k(\tau) - w^0(\tau)||_1 \to 0, \qquad 0 < c_1 \le w^k(\tau) \le c_2\,.$$

Тогда

$$t^k(1) = t_1^k \ \to \ t^0(1) = t_1^0\,, \tag{4.99}$$

и функции $u^k(t) = \mathcal{U}^k(\tau^k(t))$ *сходятся к функции* $u^0(t) = \mathcal{U}^0(\tau^0(t))$ *в интегральной норме:*

$$\int_{\hat{\Delta}^k} |u^k(t) - u^0(t)|\, dt \to 0\,.$$

Доказательство. Так как $t_1^k - t_0^k = \int_0^1 w^k(\tau)\, d\tau$, а $||w^k - w^0||_1 \to 0$, то свойство (4.99) очевидно выполняется.

Далее,

$$\int_{\hat{\Delta}^k} |u^k(t) - u^0(t)|\, dt = \int_{\hat{\Delta}^k} |\mathcal{U}^k(\tau^k(t)) - \mathcal{U}^0(\tau^0(t))|\, dt \le$$

$$\le \int_{\hat{\Delta}^k} |\mathcal{U}^k(\tau^k(t)) - \mathcal{U}^0(\tau^k(t))|\, dt \ + \int_{\hat{\Delta}^k} |\mathcal{U}^0(\tau^k(t)) - \mathcal{U}^0(\tau^0(t))|\, dt\,.$$

В первом интеграле последней строки сделаем замену $\tau = \tau^k(t)$, $t = t^k(\tau)$, $dt = w^k(\tau)\, d\tau$, и положим $\omega^k = \tau^k(\hat{\Delta}^k)$. Тогда соответствующий интеграл

$$\int_{\omega^k} \Big|\mathcal{U}^k(\tau) - \mathcal{U}^0(\tau)\Big|\, w^k(\tau)\, d\tau \ \to \ 0$$

в силу того, что $|w^k(\tau)| \le \text{const}$.

Во втором интеграле имеем по определению $\mathcal{U}^0(\tau^0(t)) = u^0(t)$, и так как $\tau^0(t^0(\tau)) \equiv \tau$, то для $\tau = \tau^k(t)$ получаем $\mathcal{U}^0(\tau^k(t)) = \mathcal{U}^0(\tau^0(t^0(\tau^k(t)))) = u^0(\theta^k(t))$, где $\theta^k(t) = t^0(\tau^k(t))$, поэтому

$$\frac{d\theta^k}{dt} = \frac{d\theta^k}{d\tau}\,\frac{d\tau^k}{dt} = \frac{w^0(\tau^k(t))}{w^k(\tau^k(t))}\,,$$

и тогда нам надо показать, что

$$\int_{\hat{\Delta}^k} |u^0(\theta^k(t)) - u^0(t)|\, dt \;\to 0\,.$$

Поскольку у нас $\theta^k(t) \Longrightarrow \theta^0(t) = t$, и $\frac{d\theta^k}{dt} \geq \text{const} > 0$, то требуемый факт вытекает из следующей леммы.

Лемма 42. *Пусть* $u(t) \in L_1(\Delta)$, *и дана последовательность абсолютно непрерывных функций* $\theta^k : \Delta \to \Delta$, $\theta^k(t) \Longrightarrow t$ *на* Δ *такая, что* $\frac{d\theta^k}{dt} \geq const > 0$. *Тогда*

$$\int_\Delta \Big| u(\theta^k(t)) - u(t) \Big|\, dt \;\to\; 0\,.$$

Доказательство. Для характеристических функций интервалов это очевидно верно (вытекает из поточечной сходимости $\theta^k(t) \to t$), поэтому верно и для их произвольных конечных линейных комбинаций. Следовательно, это верно и для любых непрерывных $u(t)$ (так как они равномерно приближаются такими комбинациями), в частности, для любых липшицевых.

Пусть $u \in L_1(\Delta)$. Тогда $\forall\, \varepsilon > 0$ найдется функция u_ε, липшицевая с константой C_ε такая, что $||u_\varepsilon - u||_1 < \varepsilon$. При этом

$$\int_\Delta \Big| u(\theta^k(t)) - u(t) \Big|\, dt \;\leq$$

$$\int_\Delta \Big| u(\theta^k) - u_\varepsilon(\theta^k) \Big|\, dt \;+ \int_\Delta \Big| u_\varepsilon(\theta^k) - u_\varepsilon(t) \Big|\, dt \;+ \int_\Delta |u_\varepsilon(t) - u(t)|\, dt\,.$$

В первом из полученных трех интегралов перейдем к переменной $\theta = \theta^k(t)$ и положим $\omega^k = \theta^k(\Delta)$. Так как по условию $\frac{dt}{d\theta^k} \leq \text{const}$, то этот интеграл есть

$$\int\limits_{\omega^k} \Big| u(\theta) - u_\varepsilon(\theta) \Big|\, \frac{dt}{d\theta^k}\, d\theta \;\to 0.$$

Для оценки второго интеграла учтем липшицевость u_ε. Тогда он

$$\leq\; C_\varepsilon \int_\Delta |\theta^k(t) - t|\, dt \;\to 0 \qquad \text{при} \quad k \to \infty\,.$$

Третий интеграл $< \varepsilon$ в силу выбора функции u_ε.

Лемма 42 доказана, а вместе с ней доказана и лемма 41, а значит, и лемма 40.

Глава 5

ПРИЛОЖЕНИЕ. Доказательство аппроксимационной теоремы

Здесь мы докажем сформулированную в главе 4 аппроксимационную теорему 45. Нам понадобится свойство накрывания нелинейного оператора на некотором "большом" множестве, а не только в малой окрестности данной точки. Такое свойство мы называем нелокальным накрыванием.

5.1 Нелокальное накрывание операторов

Пусть $X -$ полное метрическое пространство, $G -$ открытое множество в X, и задано непрерывное отображение $F : G \to Y$, где $Y -$ нормированное пространство. Метрику в X, а также метрику в Y, порожденную его нормой, будем обозначать одной и той же буквой ρ .

Лемма 43. *Пусть существует такое число $a > 0$, что для любой точки $x \in G$ существует такое число $\hat{\delta}(x) > 0$, что $\forall\, \delta \le \hat{\delta}(x)$ выполнено включение $F(B_\delta(x)) \supset B_{a\delta}(F(x))$ (т.е. имеется "накрывание в точке x"). Тогда F накрывает с константой a на всем множестве G .*

Доказательство. Возьмем произвольный шар $B_r(x_0) \subset G$, и пусть $F(x_0) = y_0$. Нам надо показать, что $F(B_r(x_0)) \supset B_{ar}(y_0)$.

Возьмем произвольный $y_1 \in B_{ar}(y_0)$. Требуется показать, что $\exists\, x_1 \in B_r(x_0)$, для которого $F(x_1) = y_1$. Рассмотрим отрезок $I = [y_0,\, y_1]$ и введем на нем параметризацию

$$y_t = \ y_0 + t(y_1 - y_0), \qquad 0 \le t \le 1.$$

Тем самым на отрезке I задано отношение линейного порядка. В произведении $B_r(x_0) \times I$ рассмотрим множество Q, состоящее из всех тех пар (x, y), для которых $F(x) = y$ и $\rho(x_0, x) \le \frac{1}{a}\, \rho(y_0, y)$ (соответствующие точки y являются, так сказать, "правильно накрытыми"). На множестве Q определим следующее отношение частичного порядка:

$$(x', y') \preceq (x'', y''), \quad \text{если} \quad y' \le y'' \quad \text{и} \quad \rho(x', x'') \le \tfrac{1}{a}\, \rho(y', y'').$$

Из компактности отрезка I, полноты пространства X, замкнутости шара $B_r(x_0)$ и непрерывности F вытекает, что любая цепь $\{(x_\alpha, y_\alpha)\}$ относительно этого порядка имеет верхнюю грань (надо взять предел y_α и соответствующий предел x_α). А тогда по лемме Цорна в Q имеется максимальный элемент $(\hat{x},\hat{y})$. Мы утверждаем, что $\hat{y}=y_1$.

Действительно, по условию для точки $\hat{x}$ существует $\hat{\delta}>0$, такое что $\forall\,\delta\in(0,\hat{\delta})$ образ шара $B_\delta(\hat{x})$ содержит шар $B_{a\delta}(\hat{y})$. Если допустить, что $\hat{y}<y_1$, то можно $\delta>0$ взять таким, чтобы чуть "большая" точка $y'=\hat{y}+a\delta(y_1-y_0)/||y_1-y_0||$ принадлежала отрезку I. Тогда мы получим $x'\in B_\delta(\hat{x})$ такой, что $F(x')=y'$. При этом пара (x',y') строго следует за парой $(\hat{x},\hat{y})$, что противоречит максимальности последней.

Итак, точка $(\hat{x},\hat{y})\in Q$ такова, что $\hat{y}=y_1$, и тогда по определению множества Q для $x_1=\hat{x}$ имеем $F(x_1)=y_1$ и $\rho(x_0,x_1)\le\frac{1}{a}\rho(y_0,y_1)$, ч. т. д. □

Из этой леммы вытекает следующее утверждение, чуть более удобное по формулировке и вполне достаточное для практического использования.

Теорема 48. *Пусть существует такое число $a>0$, что для любой точки $x\in G$ существует ее окрестность $\mathcal{O}(x)$, в которой F накрывает с константой a. Тогда F накрывает с той же константой a на всем множестве G.*

Эта теорема позволяет переходить от "локального" накрывания к "нелокальному" накрыванию — накрыванию на всем множестве G.

Следующее утверждение дает нелокальную оценку расстояния до множества уровня нелинейного оператора. Через B_δ мы обозначаем шар радиуса δ с центром в нуле.

Лемма 44. *Пусть отображение $F:X\to Y$ накрывает с константой $a>0$ на открытом множестве $G\subset X$. Пусть дано ограниченное множество $\Omega\subset X$ и число $\delta>0$ такие, что $\Omega+B_\delta\subset G$. Пусть $x_0\in\Omega$ и*

$$\mathcal{M}=\ \{\,x\in G\mid\ F(x)=F(x_0)\,\}$$

есть соответствующее множество уровня. Тогда существует такое число L, что для любой точки $x\in\Omega$

$$\rho(x,\mathcal{M})\ \le\ L\,||F(x)-F(x_0)||\,. \tag{5.1}$$

Доказательство. Пусть сначала $x\in\Omega$ и $r=||F(x)-F(x_0)||\le a\delta$. Тогда $r/a\le\delta$ и поэтому шар $B_{r/a}(x)$ содержится в G, а в силу $a-$ накрывания F образ этого шара содержит точку $y_0=F(x_0)$. Следовательно, существует $x'\in B_{r/a}(x)$, для которого $F(x')=y_0$ (т.е. $\rho(x,x')\le r/a$ и $x'\in\mathcal{M}$). Тем самым требуемая оценка выполнена с $L=1/a$.

Пусть теперь $x\in\Omega$ и $r>a\delta$. Из ограниченности Ω вытекает, что $\Omega\subset B_R(x_0)$ при некотором R. Тогда

$$\rho(x,\mathcal{M})\ \le\ \rho(x,x_0)\le\ (R/(a\delta))\,a\delta\ <\ (R/(a\delta))\,r,$$

т.е. в этом случае оценка (5.1) выполнена с $L=R/(a\delta)$. □

Для случая, когда пространство X банахово, а отображение F дифференцируемо, имеется, как мы знаем, простое естественное условие, обеспечивающее локальное накрывание (теорема 21 главы 2). Поэтому справедлива следующая теорема о "нелокальном" накрывании. (Мы изменяем в ней обозначения в целях удобства при дальнейшем ее применении.)

Теорема 49. *Пусть W — банахово пространство, $\mathcal{O}$ — открытое множество в W, и задан оператор $F : \mathcal{O} \to Z$, где Z — нормированное пространство, строго дифференцируемый в каждой точке некоторого множества $\mathcal{D} \subset \mathcal{O}$.*

Пусть существует такое число $a > 0$, что $\forall w \in \mathcal{D}$ линейный оператор $F'(w)$ накрывает с константой a. Тогда $\forall a' < a$ существует открытое множество $G \supset \mathcal{D}$, на котором исходный нелинейный оператор F накрывает с константой a' .

Доказательство. Возьмем произвольное $a' < a$. Пусть $w \in \mathcal{D}$. По теореме 21 существует окрестность $\mathcal{O}(w)$, на которой F накрывает с константой a'. Положим $G = \bigcup_{w\in\Omega} \mathcal{O}(w)$. Это открытое множество, для каждой точки w которого существует окрестность $V(w)$, на которой F накрывает с константой a'. А тогда по теореме 48 F накрывает с той же константой a' и на всем множестве G .

Перечисленные свойства получены (даже для чуть более широкого класса отображений) в работе [19] (теоремы 2.1, 2.2 и 2.4); здесь они приведены для полноты изложения.

Из этих свойств вытекает следующее утверждение, которым мы и будем пользоваться в дальнейшем.

Лемма 45. *Пусть $F : \mathcal{O} \to Z$ — оператор, строго дифференцируемый в каждой точке открытого множества $\mathcal{O}$, причем $\forall w \in \mathcal{O}$ производная $F'(w)$ накрывает с одной и той же константой $a > 0$. Пусть дано ограниченное множество $\Omega \subset \mathcal{O}$ и число $\delta > 0$ такие, что $\Omega + B_\delta \subset \mathcal{O}$, и дана точка $w_0 \in \Omega$. Тогда существует такое число L, что на множестве Ω выполняется оценка (5.1), где $\mathcal{M} = \{\, x \in \mathcal{O} \mid F(x) = F(x_0) \,\}$.*

Доказательство. Положив $\mathcal{D} = \mathcal{O}$, мы видим, что F удовлетворяет условию теоремы 49. Согласно этой теореме, F накрывает с любой константой $a' < a$, например с $a/2$, а тогда по лемме 44 на Ω справедлива оценка (5.1). $\square$

5.2 Равномерное накрывание семейства линейных операторов

Пусть $P : W \to Z$ и $H : W \to Y$ — линейные непрерывные операторы, действующие в соответствующих банаховых пространствах. Рассмотрим составной оператор

$$G = (P, H) :\ W \longrightarrow Z \times Y, \qquad w \mapsto (Pw,\, Hw).$$

(Норму в произведении пространств будем определять как сумму норм.)

Ясно, что оператор G действует "на" тогда и только тогда, когда H действует "на" и сужение оператора P на подпространство $L = ker\, H$ также есть оператор "на". (Докажите!)

Следующее условие позволяет оценивать константу накрывания составного оператора.

Лемма 46. *Пусть оператор* H *накрывает с константой* $a > 0$, *сужение* P *на подпространство* $L = ker\, H$ *накрывает с константой* $b > 0$, *и* $||P|| \le m$. *Тогда составной оператор* $G = (P, H)$ *накрывает с некоторой константой* $c = c(a, b, m) > 0$.

Здесь можно взять

$$c(a, b, m) = \left(\max \left\{ \frac{1}{a} \left(1 + \frac{m}{b} \right), \; \frac{1}{b} \right\} \right)^{-1}. \tag{5.2}$$

При доказательстве удобнее действовать с обратными величинами. Если оператор накрывает с константой $a > 0$, то будем говорить, что он метрически регулярен с константой $A = 1/a$. (Метрическая регулярность с константой k, или $k-$ регулярность, означает, что у всякого элемента в образе с нормой 1 есть прообраз нормы $\le k$.) Тогда лемма утверждает, что если H регулярен с константой A, сужение $P|_L$ регулярно с константой B, и $||P|| \le m$, то G регулярен с константой

$$C = max \{ A(1 + Bm), \; B \} . \tag{5.3}$$

Доказательство. Возьмем произвольный элемент $(z, y) \in Z \times Y$, $||z|| + ||y|| \le 1$ и покажем, что для него найдется прообраз с подходящей нормой.

В силу $A-$ регулярности оператора H имеется $w' \in W$ такой, что $Hw' = y$, $||w'|| \le A||y||$. При этом $Pw' = z'$, где $||z'|| \le ||P|| \cdot ||w'|| \le mA\,||y||$.

Нам же надо добиться равенства $Pw = z$. Положим $\bar{z} = z - z'$. В силу $B-$ регулярности P на $ker\, H$ найдется такой $\bar{w} \in ker\, H$, что $P\bar{w} = \bar{z}$, $||\bar{w}|| \le B\,||\bar{z}||$. Тогда для $w = w' + \bar{w}$ будут выполнены оба требуемых равенства:

$$Pw = Pw' + P\bar{w} = z' + \bar{z} = z,$$

$$Hw = Hw' + H\bar{w} = y + 0 = y.$$

Осталось оценить норму $||w||$. Так как

$$||\bar{w}|| \le B\,||\bar{z}|| \le B\,(||z|| + ||z'||) \le B\,(||z|| + mA\,||y||),$$

то

$$||w|| \le ||w'|| + ||\bar{w}|| \le A\,||y|| + B\,(||z|| + mA\,||y||) = A\,(1 + Bm)||y|| + B\,||z|| \,.$$

Максимум полученного выражения по множеству $||y|| + ||z|| \le 1$ есть величина (5.3), ч. т. д. □

Важно отметить, что константа c в этой лемме зависит только от констант a, b, m, и не зависит от самих операторов P, H. Это позволяет применять ее при получении равномерного накрывания для семейства операторов. В частности, справедлива следующая лемма, являющаяся очевидным следствием доказанной.

Лемма 47. *Пусть оператор* $H : W \to Y$ *накрывает с константой* $a > 0$, *и дано некоторое семейство линейных операторов* $P_\alpha : W \to Z$, $\alpha \in \mathcal{S}$, *нормы которых ограничены общей константой* m, *и каждый из которых накрывает на* $ker\, H$ *с одной и той же константой* $b > 0$. *Тогда* $\forall\, \alpha \in \mathcal{S}$ *составной оператор* $G_\alpha = (P_\alpha, H) : W \to Z \times Y$ *накрывает с одной и той же константой* $c = c(a, b, m) > 0$.

Как и раньше, можно взять $c(a, b, m)$ *в виде (5.2).*

Именно эту лемму мы будем применять для некоторого специального семейства линейных операторов в функциональных пространствах.

Рассмотрим банахово пространство $W = AC^m \times L_\infty^k$ на отрезке $[0,T]$ с элементами $\bar w = (\bar x, \bar u)$, где $\bar x \in AC^m$ ($m-$ мерная абсолютно непрерывная функция), а $\bar u \in L_\infty^k$, с нормой

$$||\bar w|| = |\bar x(0)| + ||\dot{\bar x}||_1 + ||\bar u||_\infty .$$

Пусть $Z = L_1^m \times \mathbb{R}^\nu$, и пусть для любых $\alpha = (\alpha^1, \ldots, \alpha^N) \in L_\infty^N$ и $\beta = (\beta^1, \ldots, \beta^M) \in L_\infty^M$ задан линейный оператор $P[\alpha,\beta] : W \longrightarrow Z$, действующий следующим образом: $(\bar x, \bar u) \mapsto (\bar\xi, \bar\varkappa)$, где

$$\begin{gathered} \dot{\bar x} - \sum_1^N \alpha^i(t)\, A^i(t)\, \bar x - \sum_1^M \beta^j(t)\, B^j(t)\, \bar u \;=\; \bar\xi \in L_1^m, \\ K_0\, \bar x(0) + K_T\, \bar x(T) = \;\bar\varkappa \in \mathbb{R}^\nu. \end{gathered} \tag{5.4}$$

Здесь $A^i,\ B^j$ – матрицы соответствующих размерностей с измеримыми существенно ограниченными коэффициентами, K_0 и K_T — постоянные $\nu \times m$-матрицы. Согласно §3.1, такой оператор всегда имеет замкнутый образ.

Итак, $P[\alpha,\beta](\bar x,\bar u) = (\bar\xi, \bar\varkappa)$, где $\alpha(t),\ \beta(t)$ – функциональные параметры, от которых зависит линейный оператор P. Будем считать, что пара (α,β) берется из некоторого ограниченного множества $S \subset L_\infty^{N+M}[0,T]$.

Зафиксируем некоторую пару $(\alpha_0,\beta_0) \in S$, где $\alpha_0 = (\alpha_0^1, \ldots, \alpha_0^N)$ и $\beta_0 = (\beta_0^1, \ldots \beta_0^M)$. Основной факт, который далее обеспечит нам нелокальное накрывание нужного нелинейного оператора, дается следующей теоремой.

Теорема 50. *Пусть пара (α_0,β_0) такова, что оператор $P[\alpha_0,\beta_0]$ отображает W на Z. Тогда существует слабая-* окрестность этой пары $\mathcal{V}[\alpha_0,\beta_0]$ и число $b>0$ такие, что для любой пары $(\alpha,\beta) \in \mathcal{V}[\alpha_0,\beta_0] \cap S$ соответствующий оператор $P[\alpha,\beta]$ накрывает с константой b, т.е.*

$$P[\alpha,\beta]\,(D_1^W) \;\supset\; D_b^Z, \tag{5.5}$$

где D_ρ^W есть замкнутый шар радиуса ρ пространства W с центром в нуле.

(Мы сменили обозначение шара, так как буква B используется ниже в другом смысле.)

Для доказательства потребуется следующее простое свойство.

Лемма 48. *Пусть W, Z – банаховы пространства, и линейный оператор $P: W \to Z$ имеет замкнутый образ. Пусть множество $Q = P(D_1^W)$ не содержит шара D_r^Z некоторого радиуса $r>0$. Тогда существует функционал $\lambda \in Z^*$, $||\lambda|| = 1$, такой что $(\lambda, Q) \le r$.*

Доказательство. Так как по условию подпространство $Im\, P$ замкнуто, то если оно $\neq Z$, по лемме об аннуляторе найдется ненулевой $\lambda \in Z^*$, зануляющийся на $Im\, P$, и тогда $(\lambda, Q) = 0$, так что в этом случае утверждение леммы выполнено тривиальным образом. Поэтому далее считаем, что P действует "на" Z. Тогда по теореме Банаха множество Q содержит шар D_ε некоторого радиуса $\varepsilon > 0$, т.е. $0 \in int\, Q$.

По условию существует точка $z_0 \notin Q$ такая, что $||z_0|| \le r$. Так как Q имеет непустую внутренность, то по теореме Хана–Банаха существует линейный функционал $\lambda \in Z^*$, $||\lambda|| = 1$, отделяющий (нестрого) точку z_0 от множества Q : $(\lambda, Q) \le (\lambda, z_0)$. Учитывая, что $(\lambda, z_0) \le ||\lambda|| \cdot ||z_0|| \le r$, получаем требуемое неравенство $(\lambda, Q) \le r$. $\square$

Доказательство теоремы 50. Будем для упрощения писать

$$\sum \alpha^i A^i \bar{x} = \alpha A\, \bar{x} \qquad \text{и} \qquad \sum \beta^j B^j \bar{u} = \beta B\, \bar{u},$$

где A и B есть некоторые тензоры 3-го ранга.

Так как пространство L_1^{N+M} сепарабельно и множество $S \subset (L_1^*)^{N+M}$ ограничено, то слабая-* топология на S удовлетворяет первой аксиоме счетности (и более того, метризуема). Поэтому сходимость на множестве S в этой топологии можно рассматривать в терминах последовательностей. Предположим, что утверждение теоремы неверно. Тогда найдется такая последовательность пар $(\alpha_n, \beta_n) \stackrel{\text{сл-*}}{\longrightarrow} (\alpha_0, \beta_0)$, что $\forall\, n$ образ $P[\alpha_n, \beta_n]\, (D_1^W)$ не содержит шара $D_{1/n}^Z$. (Здесь индекс n указывает номер члена последовательности, а не номер компоненты вектора α или β.) По лемме 48 найдется линейный функционал (ψ_n, μ_n) — элемент сопряженного пространства Z^*, т.е. $\psi_n \in L_\infty^m = (L_1^m)^*$ и $\mu_n \in \mathbb{R}^\nu$, такой что $||\psi_n||_\infty + |\mu_n| = 1$ и

$$(\psi_n, \mu_n) \left(P[\alpha_n, \beta_n]\, (D_1^W) \right) \;\le\; \frac{1}{n} \to 0.$$

Это неравенство означает, что $\forall\, (\bar{x}, \bar{u}) \in W$, $||\bar{x}||_{AC} + ||\bar{u}||_\infty \le 1$, выполнено неравенство

$$\int_0^T \psi_n(t)\, (\dot{\bar{x}} - \alpha_n(t) A(t)\, \bar{x} - \beta_n(t) B(t)\, \bar{u})\, dt +$$

$$+\, \mu_n (K_0\, \bar{x}(0) + K_T\, \bar{x}(T)) \;\le\; \frac{1}{n} \to 0. \tag{5.6}$$

Проанализируем полученное неравенство. Положим $\bar{x} = 0$. Тогда

$$\sup_{||\bar{u}||_\infty \le 1} \int_0^T (\psi_n \beta_n B(t)\, \bar{u})\, dt \;\le \frac{1}{n} \to 0,$$

откуда очевидно следует

$$||\, \psi_n \beta_n B\, ||_1 \to 0. \tag{5.7}$$

Теперь положим в (5.6) $\bar{u} = 0$. Тогда

$$\sup_{||\bar{x}||_{AC} \le 1} \Big[\int_0^T \psi_n(t)\, (\dot{\bar{x}} - \alpha_n(t) A(t)\, \bar{x})\, dt +$$

$$+\, \mu_n (K_0\, \bar{x}(0) + K_T\, \bar{x}(T)) \Big] \;\le\; \frac{1}{n} \to 0. \tag{5.8}$$

Для каждого n определим $m-$ мерную абсолютно непрерывную вектор-функцию φ_n из уравнения

$$\dot{\varphi}_n = -\psi_n \alpha_n A(t), \qquad \varphi_n(T) = -\mu_n K_T\,. \tag{5.9}$$

Тогда

$$\int_0^T -(\psi_n\alpha_n A)\,\bar x\,dt = \int_0^T \dot\varphi_n \bar x\,dt \;=\; \varphi_n\,\bar x\,\Big|_0^T \;-\int_0^T \varphi_n \dot{\bar x}\,dt,$$

при этом (5.8) можно переписать в виде:

$$\sup_{||\bar x||_{AC}\le 1}\;\Big[\int_0^T (\psi_n-\varphi_n)\,\dot{\bar x}\,dt \;+\; (\mu_n K_0-\varphi_n(0))\,\bar x(0)\Big] \;\le\; \frac{1}{n}\to 0.$$

Но здесь переменные $\dot{\bar x}\in L_1^m$ и $\bar x(0)\in \mathbb{R}^m$ уже независимы друг от друга, и тогда (полагая каждое из них поочередно нулю) получаем

$$||\psi_n-\varphi_n||_\infty \;\to 0, \tag{5.10}$$

$$|\,\mu_n K_0-\varphi_n(0)\,| \;\to 0. \tag{5.11}$$

Из (5.10) следует, что $\psi_n=\varphi_n+\rho_n$, где $||\rho_n||_\infty\to 0$, и в силу (5.9) и равномерной ограниченности последовательности α_n

$$\dot\varphi_n = -\varphi_n\alpha_n A(t)+\sigma_n, \qquad ||\sigma_n||_\infty\to 0. \tag{5.12}$$

Без нарушения общности считаем $\mu_n\to\mu_0$ для некоторого μ_0. Тогда из (5.9) вытекает $\varphi_n(T)\;\to\;-\mu_0 K_T$. Поскольку уравнение (5.12) линейно по α_n, и $\alpha_n \xrightarrow{\text{сл-}*} \alpha_0$, то, как известно, последовательность φ_n равномерно сходится к решению уравнения

$$\dot\varphi_0 = -\varphi_0\alpha_0 A(t), \qquad \varphi_0(T) = -\mu_0 K_T, \tag{5.13}$$

т.е. $\varphi_n=\varphi_0+\tilde\varphi_n$, где $||\tilde\varphi_n||_\infty\to 0$. Таким образом, $\psi_n=\varphi_0+(\tilde\varphi_n+\rho_n)$, где $||\tilde\varphi_n+\rho_n||_\infty\to 0$ и $\mu_n\to\mu_0$. Поэтому

$$||\varphi_0||_\infty+|\mu_0| = 1. \tag{5.14}$$

Кроме того, в неравенстве (5.8) можно заменить ψ_n на φ_0, и μ_n на μ_0, а затем заменить α_n на его слабый-* предел α_0. В правой части тогда будет стоять $1/n+o(1)$, и в пределе мы получим, что

$$\int_0^T \varphi_0\,(\dot{\bar x}-\alpha_0 A\,\bar x)\,dt \;\;+\; \mu_0(K_0\,\bar x(0)+K_T\,\bar x(T)) \;=0 \tag{5.15}$$

для любого $\bar x\in AC^{(m)}$.

Далее, из (5.7) следует $||\varphi_0\beta_n B||_1\;\to\;0$, поэтому $\int\varphi_0\beta_n B\,\bar u\,dt\;\to\;0$ для любой $\bar u\in(L_\infty^r)^N$, и поскольку $\beta_n\xrightarrow{\text{сл-}*}\beta_0$, мы получаем

$$\int_0^T \varphi_0\beta_0 B\,\bar u\,dt = \int_0^T\sum_1^M \varphi_0\beta_0^j B^j\,\bar u^j\,dt = 0. \tag{5.16}$$

Равенства (5.15) и (5.16) с нормировкой (5.14) означают, что $\operatorname{Im} P[\alpha_0,\beta_0]$ содержится в собственном подпространстве пространства Z, задаваемом равенством $(\varphi_0,\bar\xi)+(\mu_0,\bar\varkappa)=0$, что противоречит сюръективности оператора $P[\alpha_0,\beta_0]$. Теорема доказана. $\square$

Обобщим теперь эту теорему на случай, когда к пространству Z добавляется компонента $Y = L^q_\infty$, и вместе с оператором $P[\alpha,\beta]$ действует еще один оператор, не зависящий от α, β :

$$H: \; W \to Y, \qquad (\bar x, \bar u) \mapsto \; \Gamma(t)\,\bar x(t) + \Lambda(t)\,\bar u(t) \; = \bar\eta \in L^q_\infty\,, \tag{5.17}$$

где матрицы Γ и Λ размерностей $m\times q$ и $k\times q$ измеримы и существенно ограничены. Этот оператор можно также считать определенным и в чуть более широком пространстве $C^m \times L^k_\infty$. (Здесь C^m – это пространство $m-$ мерных непрерывных функций.) Установим сначала одно его свойство, которое имеет и самостоятельный интерес.

Лемма 49. *Оператор $H : C^m \times L^k_\infty \to L^q_\infty$, действующий по формуле (5.17), сюрьективен тогда и только тогда, когда матрица $\Lambda(t)$ имеет полный ранг равномерно по t, т.е. она имеет существенно ограниченную правую обратную матрицу.*

Эквивалентное требование: $det\,(\Lambda(t)\,\Lambda^*(t)) \ge const > 0.$

Доказательство. Достаточность указанного условия для сюрьективности очевидна. Нетривиальное утверждение здесь — необходимость. (Мы ее доказываем для полноты картины, хотя нам нужна будет лишь достаточность.)

Рассмотрим сначала случай $m = k = q = 1$, т.е. когда

$$H(\bar x, \bar u) = \; \gamma(t)\bar x + \lambda(t)\bar u \; \in L_\infty[0,T],$$

где γ и λ — скалярные функции. Так как H есть оператор "на", то при некотором $a > 0$

$$H\,(D^C_1 \times D^{L_\infty}_1) \;\supset\; D^{L_\infty}_a\,. \tag{5.18}$$

Мы хотим показать, что $vraimin\,|\lambda(t)| > 0$. Допустим противное: $vraimin\,|\lambda(t)| = 0$. Тогда $|\lambda(t)| \le a/3$ почти всюду на некотором множестве E полной меры. Согласно $C-$ свойству Лузина, E содержит замкнутое множество M положительной меры, на котором функция $\gamma(t)$ непрерывна. Сузим пространства C и L_∞ на это множество M. Очевидно, включение (5.18) остается верным и для этих суженных пространств.

Возьмем произвольную разрывную функцию $\hat\eta \in L_\infty(M)$ с условием $||\hat\eta||_\infty \le a$, имеющую колебание $> a$ в некоторой точке $\theta \in M$ (т.е. $\limsup_{t\to\theta}\hat\eta(t) - \liminf_{t\to\theta}\hat\eta(t) > a$; отсюда в частности следует, что θ не изолирована в M). Тогда шар $D_{a/3}(\hat\eta)$ очевидно содержит только разрывные функции (поскольку их колебания в θ больше $a/3$), и поэтому он не имеет общих точек с множеством

$$Z = \; \{\,\bar z(t) = \gamma(t)\bar x(t) \;|\; \bar x \in C(M),\;\; ||\bar x||_C \le 1\},$$

ибо последнее целиком состоит из непрерывных функций. Но в силу (5.18)

$$\hat\eta = \bar z + \lambda(t)\bar u \quad \text{для некоторых } \; \bar z \in Z, \;\; ||\bar u||_\infty \le 1,$$

поэтому $||\bar z - \hat\eta||_\infty \le ||\lambda\bar u||_\infty \le a/3$, и тогда $\bar z \in D_{a/3}(\hat\eta)$, противоречие.

Общий случай легко сводится к рассмотренному одномерному. Мы оставляем это в качестве упражнения для читателя. Лемма доказана. □

Введем подпространство $L(t) = \ker\,\Lambda(t)$, и пусть $M(t)$ есть его ортогональное дополнение в $\mathbb{R}^k$. Равномерно полный ранг матрицы $\Lambda(t)$ означает, что суженное отображение $\Lambda(t) : M(t) \to \mathbb{R}^q$ взаимно–однозначно, и более того, существует такое $a > 0$, что для почти всех t выполнено включение $\Lambda(t)(D_1 \cap M(t)) \supset D_a$. Тогда это отображение имеет ограниченное обратное, т.е. существует измеримая ограниченная матрица $\Phi(t) : \mathbb{R}^q \to \mathbb{R}^k$ такая, что $Im\,\Phi(t) = M(t)$ и $\Lambda(t)\,\Phi(t) = E_q$ – единичная матрица размера $q \times q$. Следовательно, $\Phi(t)$ есть правая обратная к $\Lambda(t)$. При этом $dim\,M(t) = q$, $dim\,L(t) = k - q$.

Для подпространства $L(t)$ имеется измеримая ограниченная матрица $C(t)$ размера $(k-q)\times k$ такая, что любая измеримая ограниченная функция $\bar u_L(t) \in L(t)$ представима в виде $\bar u_L(t) = C(t)\,\bar v(t)$, где функция $\bar v(t) \in \mathbb{R}^{k-q}$ также измерима и ограничена.

Таким образом, любая измеримая ограниченная $\bar u(t) \in \mathbb{R}^k$ представима в виде

$$\bar u(t) = \Phi(t)\,\bar\sigma(t) + C(t)\,\bar v(t), \tag{5.19}$$

где $\bar\sigma(t) \in L^q_\infty$, $\bar v(t) \in L^{k-q}_\infty$. Другими словами, управление разбивается на две части $\bar\sigma$ и $\bar v$ соответствующих размерностей.

Установим теперь соответствующее обобщение теоремы 50. Пусть, как и раньше, задано семейство операторов $P[\alpha,\beta] : W \to Z$, действующих по формуле (5.4), и задан также оператор $H : W \to Y$ по формуле (5.17). Рассмотрим составной оператор $G[\alpha,\beta] = (P[\alpha,\beta],\ H) : W \to Z \times Y$.

Теорема 51. *Пусть пара (α_0,β_0) такова, что оператор $G[\alpha_0,\beta_0]$ отображает W на $Z \times Y$. Тогда существует слабая-* окрестность этой пары $\mathcal{V}[\alpha_0,\beta_0]$ и число $c > 0$ такие, что для любой пары $(\alpha,\beta) \in \mathcal{V}[\alpha_0,\beta_0] \cap S$ соответствующий оператор $G[\alpha,\beta]$ накрывает с константой c, т.е.*

$$G[\alpha,\beta]\,(D_1^W) \supset D_c^{Z\times Y}. \tag{5.20}$$

Доказательство. Из сюрьективности оператора $G[\alpha_0,\beta_0]$ следует, что оператор H (отдельно взятый) также сюрьективен, и поэтому накрывает с некоторой константой $a > 0$.

Рассмотрим семейство операторов $G[\alpha,\beta]$ на ядре оператора H и покажем, что это семейство накрывает с некоторой общей константой $b > 0$ при (α,β) из некоторой слабой-* окрестности $\mathcal{V}[\alpha_0,\beta_0]$, пересеченной с S. Тогда утверждение теоремы будет следовать из леммы 47.

Ядро оператора H задается равенством

$$\Gamma(t)\,\bar x(t) + \Lambda(t)\,\bar u(t) = 0\,.$$

Подставляя сюда выражение $\bar u(t)$ в виде (5.19), получаем равенство

$$\Gamma\,\bar x + \Lambda\,\Phi\,\bar\sigma + \Lambda\,C\,\bar v = 0,$$

и поскольку $\Lambda\,\Phi = E$, то

$$\bar\sigma = -(\Gamma\,\bar x + \Lambda\,C\,\bar v). \tag{5.21}$$

Таким образом, часть управлений (а именно $q-$ мерный вектор $\bar\sigma$) выражается через оставшиеся $k-q$ управлений $\bar v$ и фазовую переменную $\bar x$. Независимым управлением стал вектор $\bar v(t)$ размерности $k-q$.

Подставив теперь (5.21) в (5.19), получим выражение $\bar{u}$ через $\bar{x}$ и $\bar{v}$, и подставив его в выражение (5.4) для оператора $P[\alpha,\beta]$, получим новый оператор

$$\tilde{P}[\alpha,\beta]:\ AC^m \times L_\infty^{k-q} \longrightarrow L_1^m \times \mathbb{R}^\nu$$

того же типа, что и старый (с некоторыми другими матрицами $\tilde{A}^i$, $\tilde{B}^j$ и теми же матрицами $K_0,\, K_T$), переводящий пару $(\bar{x},\bar{v})$ в пару $(\bar{\xi},\bar{\varkappa})$. Так как оператор $G[\alpha_0,\beta_0]$ был накрывающим, то его первые две компоненты — оператор $P[\alpha_0,\beta_0]$ — накрывал на ядре оператора H, а это в точности означает, что новый оператор $\tilde{P}[\alpha_0,\beta_0]$ накрывает. Тогда для него справедлива теорема 50, согласно которой существует такое число $c>0$, что для любой пары (α,β) из некоторой слабой-* окрестности $\mathcal{V}[\alpha_0,\beta_0]$, пересеченной с S, оператор $\tilde{P}[\alpha,\beta]$ накрывает с константой $c>0$. А это означает, что исходный оператор $P[\alpha,\beta]$ накрывает на $\ker H$ с некоторой общей константой $c'>0$. (Изменение константы происходит из-за того, что нормы $\bar{u}$ и $\bar{v}$ не совпадают, но в силу (5.21) и (5.19) взаимно оцениваются друг через друга и через норму $\bar{x}$. Ясно, что такое изменение несущественно.)

В силу ограниченности множества $S\subset L_\infty^{N+M}$, из которого берутся "функциональные параметры" α,β, нормы операторов $P[\alpha,\beta]$ равномерно ограничены. Тогда по лемме 47 при любых $(\alpha,\beta)\in\mathcal{V}[\alpha_0,\beta_0]$ оператор $G[\alpha,\beta]=(P[\alpha,\beta],\ H)$ накрывает с некоторой общей константой $c''>0$. Теорема доказана. □

5.3 Накрывание оператора нелинейной системы со скользящими режимами

Рассмотрим теперь следующую управляемую систему, содержащую скользящие режимы:

$$\begin{gathered}
\dot{x}-\sum_1^N \alpha^i(t) f(x,u^i,t)=0,\\
K(x(0),x(T))=0,\\
g(x,u^i,t)=0, \qquad i=1,\dots,N.\\
\sum_1^N \alpha^i(t)-1=0.
\end{gathered} \tag{5.22}$$

Здесь $x\in AC^m[0,T]$, все $u^i\in L_\infty^r$, $\alpha^i\in L_\infty$, функции $K,\,f,\,g$ определены выше в разделе 4.1. Для краткости введем обозначение $\rho=(x(0),x(T))$, а также

$$u=(u^1,\dots,u^N), \qquad \alpha=(\alpha^1,\dots,\alpha^N).$$

Левые части равенств (5.22) задают нелинейный оператор $F(x,u,\alpha)$, действующий из пространства $W=AC^m\times(L_\infty^r)^N\times L_\infty^N$ в пространство $Z\times Y$, где $Z=L_1^m\times\mathbb{R}^\nu$, $Y=(L_\infty^q)^N\times L_\infty$. Он очевидно дифференцируем в любой точке (x,u,α), и его производная

$$F'(x,u,\alpha)=\ G[x,u,\alpha]:\ W\longrightarrow Z\times Y$$

действует следующим образом: $(\bar{x},\bar{u},\bar{\alpha}) \mapsto (\bar{\xi},\bar{\varkappa},\bar{\eta},\bar{\nu})$, где $(\bar{\xi},\bar{\varkappa}) \in Z$, $(\bar{\eta},\bar{\nu}) \in Y$,

$$\begin{gathered}
\dot{\bar{x}} - \sum \alpha^i f'_x(x,u^i,t)\bar{x} - \sum \alpha^i f'_u(x,u^i,t)\bar{u}^i - \sum \bar{\alpha}^i f(x,u^i,t) \ = \ \bar{\xi}, \\
K'_{x(0)}(\rho)\,\bar{x}(0) + K'_{x(T)}(\rho)\,\bar{x}(T) \ = \bar{\varkappa}, \\
g'_x(x,u^i,t)\bar{x} + g'_u(x,u^i,t)\bar{u}^i \ = \bar{\eta}^i, \qquad i = 1,\dots,N, \\
\sum \bar{\alpha}^i(t) = \bar{\nu}.
\end{gathered} \tag{5.23}$$

Ясно, что оператор $G[x,u,\alpha]$ непрерывно зависит от (x,u,α), т.е. $F(x,u,\alpha)$ непрерывно дифференцируем. Первые две компоненты оператора $G[x,u,\alpha]$ обозначим через $P[x,u,\alpha]$, а две последние — через $H[x,u]$ (в соответствии с обозначениями предыдущего раздела). Будем считать, что $\alpha = (\alpha^1,\dots,\alpha^N)$ берется из некоторого ограниченного множества $S \subset L^N_\infty[0,T]$.

Теорема 52. *Пусть тройка* $w_0 = (x_0,u_0,\alpha_0)$ *такова, что линейный оператор* $G[w_0]$ *сюрьективен. Тогда для любого ограниченного множества* $S \subset L^N_\infty$ *найдутся числа* $b>0,\ \varepsilon>0$ *и слабая-* окрестность* $V(0)$, *обладающие свойством: для любой тройки* $(x,u,\alpha) \in W$, *удовлетворяющей условиям*

$$||x-x_0||_C < \varepsilon, \quad ||u-u_0||_\infty < \varepsilon, \tag{5.24}$$

$$\alpha \in (\alpha_0 + V(0)) \cap S, \tag{5.25}$$

оператор $G[x,u,\alpha]$ *накрывает с константой* b, *т.е.*

$$G[x,u,\alpha]\,(D^W_1) \ \supset \ D^Z_b \ .$$

Доказательство. Зафиксируем сначала (x_0,u_0) и рассмотрим операторы $\tilde{G}[\alpha] = G[x_0,u_0,\alpha]$ при произвольном $\alpha \in S$. Покажем, что полученное семейство операторов удовлетворяет условиям теоремы 51. Здесь мы имеем $\tilde{G}[\alpha] = (\tilde{P}[\alpha],\tilde{H})$, где

$$\tilde{P}[\alpha]: \ (\bar{x},\bar{u},\bar{\alpha}) \mapsto (\bar{\xi},\bar{\varkappa}) \in Z,$$

$$\tilde{H}: \ (\bar{x},\bar{u},\bar{\alpha}) \mapsto (\bar{\eta},\bar{\nu}) \in Y,$$

управлением является совокупный набор

$$(\bar{u},\bar{\alpha}) = (\bar{u}^1,\dots,\bar{u}^N,\,\bar{\alpha}^1,\dots,\bar{\alpha}^N),$$

т.е. $\bar{\alpha}^i$ являются дополнительными компонентами управления,
матрицы A^i, B^j из (5.4) имеют такой вид:

$$\begin{aligned}
A^i(t) &= \ f'_x(t,x_0(t),u^i_0(t)), \qquad i = 1,\dots,N, \\
B^j(t) &= \ f'_u(t,x_0(t),u^i_0(t)), \qquad j = 1,\dots,N, \\
B^{N+j}(t) &= \ f(t,x_0(t),u^i_0(t)), \qquad j = 1,\dots,N\,.
\end{aligned}$$

Параметр β здесь имеет вид $\beta = (\alpha^1, \ldots, \alpha^N, 1, \ldots, 1)$, т.е. компонентам управления $\bar{u}^i$ соответствует множитель $\beta^i = \alpha^i$, а компонентам управления $\bar{\alpha}^i$ соответствует множитель $\beta^{N+i} = 1$; при этом $M = 2N$.

Матрица $\Gamma(t)$ из (5.17) образована последовательным присоединением матриц $g'_x(t, x_0(t), u_0^i(t))$, $i = 1, \ldots, N$, в вертикальном порядке и добавлением нулевой строки, а матрица $\Lambda(t)$ образована последовательным присоединением матриц $g'_u(t, x_0(t), u_0^i(t))$, $i = 1, \ldots, N$, в вертикальном порядке и добавлением строки $(1, \ldots, 1)$, соответствующей вектору $\bar{\alpha}$. Впрочем, конкретный вид всех этих матриц нам не требуется, надо лишь убедиться, что полученная матрица $\Lambda(t)$ имеет равномерно полный ранг. Это, как мы знаем, эквивалентно тому, что отображение $\bar{u} \longmapsto \Lambda(t)\,\bar{u}$ действует "на" соответствующее пространство L_∞.

У нас роль $\bar{u}$ играет набор $(\bar{u}, \bar{\alpha}) = (\bar{u}^1, \ldots, \bar{u}^N, \bar{\alpha}^1, \ldots, \bar{\alpha}^N)$, а соответствующее значение $\Lambda(t)\,\bar{u}$ есть набор

$$\begin{aligned} \bar{\eta}^i &= g'_u(t, x_0, u_0^i)\,\bar{u}^i, \qquad i = 1, \ldots, N, \\ \bar{\nu} &= \sum \bar{\alpha}^i\,. \end{aligned}$$

Но мы знаем, что для каждого i отображение $\bar{u}^i \mapsto g'_u(t, x_0, u_0^i)\,\bar{u}^i$ действует "на", и так как все они независимы друг от друга и от последнего отображения $\bar{\alpha} \mapsto \sum \bar{\alpha}^i$ (очевидно сюрьективного), то и требуемое отображение очевидно сюрьективно.

Так как по условию оператор $\tilde{G}[\alpha_0]$ действует "на", то мы находимся в условиях теоремы 51. По этой теореме $\exists\, b > 0$ и слабая-* окрестность $V(\alpha_0)$ такие, что $\forall\, \alpha \in V(\alpha_0) \cap S$ оператор $\tilde{G}[\alpha]$ накрывает с константой b. Но далее, поскольку функции f, g и их производные равностепенно непрерывны по (x, u), а множество S ограничено, то равномерно по всем $\alpha \in S$ операторы $\tilde{G}[\alpha] = G[x_0, u_0, \alpha]$ и $G[x, u, \alpha]$ мало отличаются друг от друга в операторной норме, если x, u равномерно близки к x_0, u_0. Следовательно, $\forall\, b' < b$, $\exists\, \varepsilon > 0$ такое, что для любых x, u, удовлетворяющих (5.24), оператор $G[x, u, \alpha]$ накрывает с константой b'. Теорема доказана. $\Box$

Отсюда и из леммы 45 применительно к введенному пространству W и оператору F, состоящему из левых частей равенств (5.22), вытекает нужная нам равномерная оценка расстояния до множества $\mathcal{M}$, которое задается этими равенствами.

Лемма 50. *Пусть тройка $w_0 = (x_0, u_0, \alpha_0)$ такова, что оператор $F'[w_0]$ сюрьективен. Пусть $S \subset L_\infty^N$ есть произвольное ограниченное множество. Тогда существуют числа $\varepsilon > 0$, C и слабая-* окрестность $V(0)$, такие что для любой тройки $w = (x, u, \alpha)$, удовлетворяющей условиям (5.24), (5.25), выполнена оценка*

$$\rho(w, \mathcal{M}) \;\le\; C\,||F(w) - F(w_0)||\,. \tag{5.26}$$

Доказательство. Достаточно рассмотреть случай, когда S есть открытый шар произвольного радиуса r с центром в нуле (поскольку любое ограниченное множество можно поместить в такой шар). Так как $F'(w_0)$ "на", по теореме 52 существуют $b > 0$, $\varepsilon > 0$ и слабая-* окрестность нуля $V(0)$, такие что для всех w, удовлетворяющих (5.24), (5.25) (множество которых мы обозначим через $\mathcal{O}$), оператор $F'(w)$ накрывает с константой b. Пусть множество $\Omega \subset W$ состоит из всех w, удовлетворяющих (5.24), (5.25) для $\frac{1}{2}\varepsilon$, $\frac{1}{2}V(0)$, $\frac{1}{2}S$, и пусть $\delta > 0$ таково, что $\delta \le \frac{1}{2}\varepsilon$, $\delta \le \frac{1}{2}r$. Тогда выполнены все условия леммы 45, согласно которой на Ω имеется оценка (5.1), в наших обозначениях оценка (5.26). В силу произвольности r этого достаточно для доказательства леммы. $\square$

Мы будем применять лемму 50 для случая, когда S есть множество функций $\alpha(t) \in L_\infty^N[0,T]$, принимающих свои значения в стандартном симплексе

$$A = \{\, \alpha \in \mathbb{R}^N \mid \quad \alpha^i \geq 0, \quad \sum \alpha^i = 1 \,\}.$$

5.4 Доказательство аппроксимационной теоремы

Мы покажем, что в любой $(C, L_\infty, \sigma^*)-$ окрестности точки $w_0 = (x_0, u_0, \alpha_0)$ в пространстве W содержится точка $w = (x, u, \alpha) \in \mathcal{M}$, у которой все $\alpha^i(t)$ принимают значения 0 или 1. Напомним, что у нас $u = (u^1, \ldots, u^N)$, $\quad \alpha = (\alpha^1, \ldots, \alpha^N)$, и $||w|| = ||x||_{AC} + ||u||_\infty + ||\alpha||_\infty$.

1) Пусть дана произвольная такая окрестность. Согласно лемме 50 можно считать, что в ней выполнена оценка (5.26). Кроме того, данная окрестность всегда содержит окрестность $\Omega = \Omega(w_0, \varepsilon)$ вида:

$$||x - x_0||_C < \varepsilon, \qquad ||u - u_0||_\infty < \varepsilon,$$

$$\alpha \in \mathcal{V}(\alpha_0, \varepsilon) = \ \{\alpha \in L_\infty^N : \ |\langle l_j,\, \alpha - \alpha_0 \rangle| < \varepsilon, \ \ j = 1, \ldots, \nu \},$$

где $\varepsilon > 0$, $\nu -$ натуральное число, все $l_j(t) \in L_1^N[0,T]$, причем $||l_j||_1 \leq 1$.
Зафиксируем функции $l_j(t)$ и далее менять их не будем, а число $\varepsilon > 0$ будем выбирать как необходимо.

Искомая точка $w = (x, u, \alpha) \in \Omega \cap \mathcal{M}$ будет получена в виде предела последовательности точек $w_n = (x_n, u_n, \alpha_n) \in \Omega \cap \mathcal{M}$, которую мы сейчас построим, отправляясь от точки w_0 .

Для каждого $\delta \in [0, 1)$ обозначим через $A(\delta)$ симплекс в пространстве $\mathbb{R}^N$, полученный сжатием исходного симплекса A относительно его центра с коэффициентом $(1 - \delta)$. Таким образом, $A(0) = A$, и при любом $\delta > 0$ симплекс $A(\delta)$ лежит внутри A "на глубине δ". Условие (a) теоремы означает, что при некотором $\delta > 0$ почти всюду $\alpha_0(t) \in A(\delta)$.

Зафиксируем теперь имеющиеся $\varepsilon,\, \delta,$ и определим последовательности

$$\varepsilon_n = \varepsilon/2^n, \qquad \delta_n = \delta/3^n, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots,$$

(таким образом, $\varepsilon_0 = \varepsilon$, $\delta_0 = \delta$), и затем положим

$$\gamma_n = \ \min \left\{ \frac{\varepsilon_n}{4C}, \frac{\delta_n}{3C} \right\} ,$$

где $C -$ константа из (5.26), так что $C\gamma_n \leq \varepsilon_n/4$ и $C\gamma_n \leq \delta_n/3$.
Для краткости записи введем набор функционалов $l = (l_1, \ldots, l_\nu)$, так что $\langle l, \alpha \rangle$ есть вектор $\langle l, \alpha \rangle = (\langle l_1, \alpha \rangle, \ldots \langle l_\nu, \alpha \rangle)$.

2) Сделаем первый шаг. Имеем $F(w_0) = 0$, т.е. для точки w_0 выполнены равенства (5.22). Рассмотрим первое из этих равенств как уравнение относительно x при фиксированном $u = u_0$ и $\alpha \xrightarrow{\text{сл-*}} \alpha_0$ с начальным значением $x(0) = x_0(0)$. Поскольку это уравнение линейно по α, то, как известно, для соответствующих решений имеем $||x - x_0||_C \to 0$.

Так как $\alpha_0(t) \in A(\delta_0)$ и $A(\delta_0) \subset A(2\delta_0/3)$, то указанные $\alpha \xrightarrow{\text{сл-*}} \alpha_0$ можно брать принимающими значения в вершинах симплекса $A(2\delta_0/3)$, и поэтому существует $\tilde\alpha(t) \in ex\,A(2\delta_0/3)$, такая что
$$|\langle l,\, \tilde\alpha - \alpha_0\rangle| \;<\; \varepsilon_0/4,$$
т.е. $\tilde\alpha \in \mathcal{V}(\alpha_0,\, \varepsilon_0/4)$, и при этом
$$||\tilde x - x_0||_C \;<\; \varepsilon_0/4,$$
$$||F(\tilde x, u_0, \tilde\alpha) - F(x_0, u_0, \alpha_0)|| \;<\; \gamma_0\,.$$

(Первая и четвертая компоненты $F(\tilde x, u_0, \tilde\alpha)$ равны 0 по определению $\tilde x, \tilde\alpha$, а две остальные не зависят от α, поэтому они близки к соответствующим компонентам оператора $F(x_0, u_0, \alpha_0)$ для $\tilde x(t)$, равномерно близкого к $x_0(t)$.)

Тогда полученная тройка $(\tilde x, u_0, \tilde\alpha)$ лежит в Ω, и следовательно, для нее выполнена оценка (5.26), согласно которой существует точка $w_1 = (x_1, u_1, \alpha_1) \in \mathcal{M}$, такая что $||w_1 - (\tilde x, u_0, \tilde\alpha)|| < C\gamma_0$. При этом выполнены оценки:
$$||x_1 - x_0||_C \le ||x_1 - \tilde x|| + ||\tilde x - x_0|| < C\gamma_0 + \varepsilon_0/4 \le \varepsilon_0/4 + \varepsilon_0/4 = \varepsilon_0/2 = \varepsilon_1\,,$$
$$||u_1 - u_0||_\infty < C\gamma_0 \le \varepsilon_0/4 < \varepsilon_0/2 = \varepsilon_1\,,$$
$$|\langle l,\, \alpha_1 - \alpha_0\rangle| \le |\langle l,\, \alpha_1 - \tilde\alpha\rangle| + |\langle l,\, \tilde\alpha - \alpha_0\rangle| \le$$
$$\le ||l||_1 \cdot ||\alpha_1 - \tilde\alpha||_\infty \;+ \varepsilon_0/4 \le 1 \cdot C\gamma_0 + \varepsilon_0/4 < \varepsilon_0/4 + \varepsilon_0/4 = \varepsilon_1\,,$$
т.е. $\alpha_1 \in \mathcal{V}(\alpha_0, \varepsilon_1)$, и вся тройка $w_1 \in \Omega(w_0, \varepsilon_1)$. Отсюда следует, что $\Omega(w_1, \varepsilon_1) \subset \Omega = \Omega(w_0, \varepsilon_0)$.

Далее, так как $\tilde\alpha \in ex\,A(2\delta_0/3)$ и $||\alpha_1 - \tilde\alpha||_\infty < C\gamma_0 \le \delta_0/3$, то с одной стороны,
$$\alpha_1(t) \in A(2\delta_0/3 - C\gamma_0) \subset A(\delta_0/3),$$
$$\text{а с другой,} \qquad \operatorname{dist}(\alpha_1(t),\, ex\,A) \le 2\delta_0/3 + C\gamma_0 \le \delta_0\,.$$
Итак, точка $w_1 = (x_1, u_1, \alpha_1) \in \mathcal{M}$ построена. Для нее выполнены следующие условия:
$$||x_1 - x_0||_C < \varepsilon_1, \qquad ||u_1 - u_0||_\infty < \varepsilon_1\,, \qquad \alpha_1 \in \mathcal{V}(\alpha_0, \varepsilon_1),$$
т.е. новая точка $w_1 \in \Omega(w_0, \varepsilon_1)$, поэтому $\Omega(w_1, \varepsilon_1) \subset \Omega = \Omega(w_0, \varepsilon_0)$, и кроме того,
$$\text{п.в.} \qquad \alpha_1(t) \in A(\delta_1),$$
$$\text{п.в.} \qquad \operatorname{dist}(\alpha_1(t),\, ex\,A) \le 3\delta_1\,. \tag{5.27}$$

Этот первый шаг был в некотором смысле подготовительным и несколько отличным от последующих. (Мы добились того, что теперь для α_1 выполнена оценка (5.27).) Следующие шаги будут уже в точности итерациями одной и той же процедуры.

3) Допустим, что при некотором $n \geq 1$ построены точки $w_k = (x_k, u_k, \alpha_k) \in \mathcal{M}$, $k = 1, \ldots, n$ и выполнены условия:

$$||x_n - x_{n-1}||_C < \varepsilon_n, \qquad ||u_n - u_{n-1}||_\infty < \varepsilon_n\,, \tag{5.28}$$

$$\alpha_n \in \mathcal{V}(\alpha_{n-1}, \varepsilon_n), \tag{5.29}$$

$$\Omega(w_n, \varepsilon_n) \quad \text{содержится в} \quad \Omega, \tag{5.30}$$

$$\text{п.в.} \qquad \alpha_n(t) \in A(\delta_n), \tag{5.31}$$

$$\text{п.в.} \qquad \operatorname{dist}(\alpha_n(t),\, ex\,A) \leq 3\delta_n\,. \tag{5.32}$$

Построим точку w_{n+1}. Для этого рассмотрим первое равенство в (5.22) как уравнение относительно x при фиксированном $u = u_n$ и $\alpha \xrightarrow{\text{сл-*}} \alpha_n$ с начальным значением $x(0) = x_n(0)$. Тогда для соответствующих решений имеем $||x - x_n||_C \to 0$.

Так как $\alpha_n(t) \in A(\delta_n)$ и $A(\delta_n) \subset A(2\delta_n/3)$, то существует

$$\tilde{\alpha}(t) \in ex\,A(2\delta_n/3), \tag{5.33}$$

такая что $|\langle l,\, \tilde{\alpha} - \alpha_n\rangle| \;<\; \varepsilon_n/4$, т.е. $\tilde{\alpha} \in \mathcal{V}(\alpha_n,\, \varepsilon_n/4)$, и при этом

$$||\tilde{x} - x_n||_C \;<\; \varepsilon_n/4,$$

$$||F(\tilde{x}, u_n, \tilde{\alpha}) - F(x_n, u_n, \alpha_n)|| \;<\; \gamma_n\,. \tag{5.34}$$

Кроме того, по лемме 35 (об L_1- расстоянии до почти крайней точки) в силу оценки (5.32) можно считать, что

$$||\tilde{\alpha} - \alpha_n||_1 \;\leq\; 9N\,\delta_n\,. \tag{5.35}$$

Легко видеть, что $(\tilde{x}, u_n, \tilde{\alpha}) \in \Omega(w_n, \varepsilon_n) \subset \Omega$, и поэтому из (5.34) вытекает, что существует $w_{n+1} \in \mathcal{M}$, такая что

$$||w_{n+1} - (\tilde{x}, u_n, \tilde{\alpha})|| < C\gamma_n\,. \tag{5.36}$$

(Функции $\tilde{x}$, $\tilde{\alpha}$ мы не снабжаем индексами; это промежуточные рабочие точки на каждом шаге.) Тогда

$$||x_{n+1} - x_n||_C \leq ||x_{n+1} - \tilde{x}|| + ||\tilde{x} - x_n|| < C\gamma_n + \varepsilon_n/4 \leq \varepsilon_n/4 + \varepsilon_n/4 = \varepsilon_n/2 = \varepsilon_{n+1}\,,$$

$$||u_{n+1} - u_n||_\infty < \; C\gamma_n \leq \varepsilon_n/4 \; < \varepsilon_n/2 = \varepsilon_{n+1}\,,$$

$$|\langle l,\, \alpha_{n+1} - \alpha_n\rangle| \leq \; |\langle l,\, \alpha_{n+1} - \tilde{\alpha}\rangle| + |\langle l,\, \tilde{\alpha} - \alpha_n\rangle| \leq$$

$$\leq ||l||_1 \cdot ||\alpha_{n+1} - \tilde{\alpha}||_\infty \; + \varepsilon_n/4 \; \leq 1 \cdot C\gamma_n + \varepsilon_n/4 < \varepsilon_n/4 + \varepsilon_n/4 \; = \varepsilon_{n+1}\,,$$

т.е. $\alpha_{n+1} \in \mathcal{V}(\alpha_n, \varepsilon_{n+1})$. Таким образом, $w_{n+1} \in \Omega(w_n, \varepsilon_{n+1})$, и поэтому, учитывая (5.30) и равенство $\varepsilon_{n+1} = \varepsilon_n/2$, получаем $\Omega(w_{n+1}, \varepsilon_{n+1}) \subset \Omega(w_n, \varepsilon_n) \subset \Omega$.

Далее, из (5.33) и (5.36) вытекает, что

$$\alpha_{n+1}(t) \in A(2\delta_n/3 - C\gamma_n) \subset A(\delta_n/3 = \delta_{n+1}),$$

$$\operatorname{dist}(\alpha_{n+1}(t),\, ex\, A) \le\, 2\delta_n/3 + C\gamma_n \,\le \delta_n = 3\delta_{n+1}\,.$$

Таким образом, выполнены оценки (5.28)–(5.32) с заменой $n \mapsto n+1$, и значит, возможен следующий шаг — от w_{n+1} к w_{n+2}.

Наконец, из (5.35) и (5.36) получаем еще одну важную оценку:

$$||\alpha_{n+1} - \alpha_n||_1 \;\le\; ||\alpha_{n+1} - \tilde\alpha||_\infty + ||\tilde\alpha - \alpha_n||_1 \;\le$$

$$\le\; C\gamma_n + 9N\,\delta_n \;\le\; \frac{1}{3}\,\delta_n + 9N\,\delta_n \;<(9N+1)\,\delta_n\,,$$

которая выполняется на каждом шаге нашего процесса.

4) Итак, мы построили последовательность точек $w_n = (x_n, u_n, \alpha_n) \in \mathcal{M}$, $n = 1, 2, \ldots,$ для каждой из которых выполнены условия (5.28)–(5.32), а также дополнительная оценка

$$||\alpha_{n+1} - \alpha_n||_1 \;\le\; (9N+1)\,\delta_n\,.$$

В силу этой оценки и (5.28) последовательность w_n фундаментальна относительно нормы $||x||_C + ||u||_\infty + ||\alpha||_1$, и поэтому она имеет предел $\hat w = (\hat x, \hat u, \hat\alpha)$ в пространстве $C \times L_\infty \times L_1$ (более широком, чем наше W). Таким образом,

$$||x_n - \hat x||_C \to 0, \qquad ||u_n - \hat u||_\infty \to 0, \qquad ||\alpha_n - \hat\alpha||_1 \to 0.$$

Посмотрим, что выполнено для предельной тройки.

Так как $\forall n$ выполнено уравнение $F^1(w_n) = 0$, где $F^1(w)$ есть первая компонента оператора $F(w)$, то, рассмотрев интегральную форму этого уравнения, приходим к выводу, что для предельного $\hat x(t)$ также выполнено это интегральное уравнение, поэтому на самом деле $\hat x \in AC[0,T]$ и для него выполнено уравнение $F^1(\hat w) = 0$ (и следовательно, $||x_n - \hat x||_{AC} \to 0$).

Компоненты F^2, F^3 не содержат $\dot x, \alpha$, поэтому для них очевидно выполнены равенства $F^2(\hat x, \hat u) = 0$, $F^3(\hat x, \hat u) = 0$.

Далее, для всякого замкнутого множества $E \subset \mathbb{R}^N$ множество функций $\alpha \in L_1^N$, таких что п.в. $\alpha(t) \in E$, очевидно замкнуто в L_1^N. (Докажите!) Отсюда следует, что п.в. $\hat\alpha(t) \in A$, и тем самым $\hat\alpha(t)$ ограничена, т.е. $\hat\alpha \in L_\infty^N[0,T]$, и $F^4(\hat\alpha) = \sum \hat\alpha^i(t) - 1 = 0$.

Таким образом, предельная точка $\hat w$ принадлежит пространству W, и для нее $F(\hat w) = 0$, т.е. $\hat w \in \mathcal{M}$. Из (5.30) следует, что $\hat w \in \Omega$. (Это также следует из суммирования оценок (5.28), (5.29).)

Наконец, из оценки (5.32) следует, что $\forall \varepsilon > 0$ при достаточно больших n почти всюду выполнено $\operatorname{dist}(\alpha_n(t), ex\, A) \le \varepsilon$, т.е. $\alpha_n(t)$ принадлежит замкнутому $\varepsilon-$ раздутию множества вершин симплекса A. Тогда и предельная $\hat\alpha(t)$ почти всюду принадлежит этому $\varepsilon-$ раздутию, а в силу произвольности $\varepsilon > 0$ она принадлежит пересечению всех $\varepsilon-$ раздутий, которое совпадает с множеством вершин $ex\, A$, так как последнее замкнуто. Итак, почти всюду $\hat\alpha(t) \in ex\, A$, а это и означает, что каждая компонента $\hat\alpha^i(t)$ может принимать лишь два значения: 0 и 1. Теорема доказана. $\square$

Литература

[1] Л.С. Понтрягин, В.Г. Болтянский, Р.В. Гамкрелидзе, Е.Ф. Мищенко. Математическая теория оптимальных процессов. М., Наука, 1969.

[2] А.Я. Дубовицкий, А.А. Милютин. Задачи на экстремум при наличии ограничений. — *Журнал вычислительной математики и мат. физики*, 1965, Т. 5, № 3, с. 395–453.

[3] А.Я. Дубовицкий, А.А. Милютин. Необходимые условия слабого экстремума в общей задаче оптимального управления. Москва, Наука (ИХФ АН СССР), 1971.

[4] А.Я. Дубовицкий, А.А. Милютин. Теория принципа максимума. — В кн. *"Методы теории экстремальных задач в экономике"* (ред. В.Л. Левин), М., Наука, ЦЭМИ, 1981, с. 6–47.

[5] А.А. Милютин. Общие схемы получения необходимых условий экстремума и задачи оптимального управления. — *Успехи мат. наук,* 1970. т. 25, вып.5, с. 110–116.

[6] А.А. Милютин. Принцип максимума в регулярной задаче оптимального управления. — В кн. *"Необходимое условие в оптимальном управлении",* М., Наука, 1990.

[7] И.В. Гирсанов. Лекции по теории экстремальных задач. МГУ, 1970.

[8] Г.А. Блисс. Лекции по вариационному исчислению. М., ИЛ, 1950.

[9] И.М. Гельфанд, С.В. Фомин. Вариационное исчисление. М., Физматгиз, 1961.

[10] Н. Данфорд, Дж.Т. Шварц. Линейные операторы. Общая теория. М., ИЛ, 1962.

[11] А.Н. Колмогоров, С.В. Фомин. Элементы теории функции и функционального анализа. М., Наука, 1976.

[12] Л.А. Люстерник, В.И. Соболев. Краткий курс функционального анализа. М., Высшая школа, 1982.

[13] И.П. Натансон. Теория функций вещественной переменной. М., Наука, 1974.

[14] В.И. Аркин, В.Л. Левин. Выпуклость значений векторных интегралов, теоремы измеримого выбора и вариационные задачи. — *УМН,* 1972, т. 27, N 3, с. 21–77.

[15] А.Д. Иоффе, В.М. Тихомиров. Теория экстремальных задач. М., Наука, 1974.

[16] В.М. Алексеев, В.М. Тихомиров, С.В. Фомин. Оптимальное управление. М., Наука, 1979.

[17] Б.Н. Пшеничный. Необходимые условия экстремума. М., Наука, 1980.

[18] В.А. Якубович, А.С. Матвеев. Абстрактная теория оптимального управления. СПб, изд-во Санкт-Петербургского университета, 1994.

[19] А.В. Дмитрук, А.А. Милютин, Н.П. Осмоловский. Теорема Люстерника и теория экстремума. — *Успехи мат. наук,* 1980, т. 35, N 6, с. 11–46.

[20] В.В. Дикусар, А.А. Милютин. Качественные и численные методы в принципе максимума. М., Наука, 1989.

[21] А.В. Дмитрук. Принцип максимума для общей задачи оптимального управления с фазовыми и регулярными смешанными ограничениями. — В сб. *"Оптимальность управляемых динамических систем",* М., ВНИИСИ, 1993, вып. 14, с. 26–42.

[22] A.A. Milyutin, N.P. Osmolovskii. Calculus of Variations and Optimal Control. American Mathematical Society, 1998.

[23] А.А. Милютин. Принцип максимума в общей задаче оптимального управления. М., Физматлит, 2001.

[24] А.В. Дмитрук. A nonlocal Lyusternik estimate and its application to control systems with sliding modes. — in "Nonlinear Control Systems 2001", Elsevier, 2002, vol. 2, p. 1061–1064 (http://dmitruk.tripod.com).

Милютин Алексей Алексеевич, Дмитрук Андрей Венедиктович,
Осмоловский Николай Павлович

ПРИНЦИП МАКСИМУМА В ОПТИМАЛЬНОМ УПРАВЛЕНИИ
М., Издательство Центра прикладных исследований при механико-математическом факультете МГУ, 168 стр.

Оригинал макет изготовлен издательской группой механико-математического факультета МГУ

Подписано в печать 07.10.2004 г.
Формат 60 × 90 1/16. Объем 10,5 п.л.
Заказ 15 Тираж 300 экз.

Издательство ЦПИ при механико–математическом факультете МГУ
г. Москва, Воробьевы горы.
Лицензия на издательскую деятельность ИД № 04059 от 20.02.2001 г.

Отпечатано на типографском оборудовании механико-математического факультета и Франко-русского центра им. А. М. Ляпунова